ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Λογική

Η λογική παρέχει έναν τρόπο για την αποσαφήνιση και την τυποποίηση της διαδικασίας της ανθρώπινης σκέψης και προσφέρει μια σημαντική και εύχρηστη μεθοδολογία για την αναπαράσταση και επίλυση προβλημάτων. Η ανάγκη χρήσης μιας αυστηρά ορισμένης γλώσσας, με τη μαθηματική έννοια, προήλθε από την ακαταλληλότητα της φυσικής γλώσσας για χρήση σε υπολογιστικά συστήματα, όπως αναφέρθηκε στην εισαγωγή. Αντίθετα, η λογική προσφέρει μια σαφή, ακριβή και απλή στη σύνταξη γλώσσα, καθώς και τη δυνατότητα παραγωγής νέας γνώσης από την ήδη υπάρχουσα.

Η *μαθηματική λογική* (*mathematical logic*) είναι η συστηματική μελέτη των *έγκυρων ισχυρισμών* (*valid arguments*) με χρήση εννοιών από τα μαθηματικά. Ένας *ισχυρισμός* (*argument*) αποτελείται από συγκεκριμένες *δηλώσεις* (*ή προτάσεις*), τις *υποθέσεις* (*premises*), από τις οποίες παράγονται άλλες δηλώσεις, τα *συμπεράσματα* (*conclusions*). Για παράδειγμα, παρακάτω φαίνεται ένας ισχυρισμός εκφρασμένος στη λογική:

Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί, (*Δήλωση*)

Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος, (*Δήλωση*)

επομένως, ο Σωκράτης είναι θνητός (*Συμπέρασμα*)

Η *συμβολική λογική* (*symbolic logic*) είναι μια στενογραφία της λογικής. Οι ισχυρισμοί μελετώνται ανεξάρτητα από την περιοχή στην οποία ορίζονται, εκφράζοντάς τους στη συμβολική τους μορφή. Έτσι ο προηγούμενος ισχυρισμός σε συμβολική λογική αναπαρίσταται ως:

P: $\forall X\ άνθρωπος(X) \rightarrow θνητός(X)$

Q: $άνθρωπος(Σωκράτης)$

R: $θνητός(Σωκράτης)$

$P \wedge Q \models R$

Όπως είναι προφανές, για να είναι εφικτή και η συμβολική αναπαράσταση της γνώσης, απαιτείται ο ορισμός της σύνταξης (syntax) και της σημασιολογίας (semantics) της λογικής που θα χρησιμοποιηθεί. Η σύνταξη καθορίζει τις επιτρεπτές ακολουθίες συμβόλων και η σημασιολογία καθορίζει τις μεταξύ τους σχέσεις. Η σύνταξη προϋποθέτει τον καθορισμό του αλφάβητου της γλώσσας, δηλαδή του συνόλου των συμβόλων με τα οποία μπορεί να κατασκευαστούν αποδεκτές ακολουθίες (προτάσεις). Η ερμηνεία αντιστοιχεί τα σύμβολα της γλώσσας στις οντότητες του κόσμου που αναπαρίσταται και επιτρέπει την απόδοση λογικών τιμών στις προτάσεις της γλώσσας, δηλαδή το χαρακτηρισμό τους ως αληθείς ή ψευδείς.

Στις ενότητες που ακολουθούν δίνεται μια συνοπτική περιγραφή των βασικών μορφών λογικής που χρησιμοποιούνται για αναπαράσταση γνώσης στην ΤΝ, ξεκινώντας με την απλούστερη μορφή λογικής, την προτασιακή.

9.1 Προτασιακή Λογική

Η *προτασιακή λογική* (*propositional logic*) αποτελεί την απλούστερη μορφή μαθηματικής λογικής και η παρουσίασή της κρίνεται αναγκαία, καθώς αποτελεί τη βάση για περισσότερο πολύπλοκες λογικές. Στην προτασιακή λογική κάθε γεγονός του πραγματικού κόσμου αναπαριστάται με μια λογική πρόταση, η οποία χαρακτηρίζεται είτε ως *αληθής* (*t-true*) ή ως *ψευδής* (*f-false*), μπορεί δηλαδή να έχει δύο *λογικές τιμές*. Οι λογικές προτάσεις αναπαριστώνται συνήθως από λατινικούς χαρακτήρες P, Q, R, κτλ., και ονομάζονται *άτομα* (*atoms*). Τα άτομα μπορούν να συνδυαστούν με τη χρήση *λογικών συμβόλων* ή *συνδετικών* (*connectives*) και οι σύνθετες προτάσεις που προκύπτουν ονομάζονται *ορθά δομημένοι τύποι* (*well formed formulae*). Ο Πίνακας 9.1 παρουσιάζει τα συνδετικά της προτασιακής λογικής. Θα πρέπει να σημειωθεί ότι η σύνταξη περιλαμβάνει και τρία σημεία στίξης, τα "(" και ")" (παρενθέσεις) και το "," (κόμμα).

Πίνακας 9.1: Συνδετικά της προτασιακής λογικής.

Σύμβολο	Ονομασία / Επεξήγηση
$\wedge$	σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ")
$\vee$	διάζευξη (λογικό "Η")
$\neg$	άρνηση
$\rightarrow$	συνεπαγωγή ("ΕΑΝ ΤΟΤΕ")
$\leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία ("ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ").

Για παράδειγμα, έστω ότι απαιτείται η αναπαράσταση της ακόλουθης γνώσης με προτασιακή λογική:

$1^{η}$ Πρόταση: "*επιδιώκω την ειρήνη*"

$2^{η}$ Πρόταση: "*αποφεύγω τον πόλεμο*"

$3^{η}$ Πρόταση: "*εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο*"

Σε κάθε πρόταση (ονομάζεται και *γεγονός*) που θέλουμε να αναπαραστήσουμε, αντιστοιχεί ένας λατινικός χαρακτήρας. Για παράδειγμα:

P: "*επιδιώκω την ειρήνη*"

Q: "*αποφεύγω τον πόλεμο*"

γούμενες, εξασφαλίζοντας έτσι την ορθότητα των αποτελεσμάτων. Υπάρχουν αρκετοί κανόνες συμπερασμού, μερικούς από τους οποίους παραθέτει ο Πίνακας 9.5.

Πίνακας 9.5: Κανόνες συμπερασμού της προτασιακής λογικής.

Κανόνας Συμπερασμού		Ονομασία
(1)	$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_N \vdash P_i$	απαλοιφή σύζευξης (and elimination)
(2)	$P_1, P_2, \ldots P_N \vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_N$	εισαγωγή συζεύξεων (and introduction)
(3)	$P_1 \vdash P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_N$	εισαγωγή διαζεύξεων (or introduction)
(4)	$\neg\neg P \vdash P$	απαλοιφή διπλής άρνησης (double negation elimination)
(5)	$P, P \rightarrow Q \vdash Q$	τρόπος του θέτειν (modus ponens)
(6)	$P \vee Q, \neg Q \vee R \vdash P \vee R$	αρχή της ανάλυσης (resolution)

Οι κανόνες συμπερασμού συνήθως γράφονται σαν "κλάσματα" με το πρώτο μέρος του κανόνα ως "αριθμητή" και το δεύτερο ως "παρονομαστή". Για παράδειγμα, ο κανόνας της απαλοιφής σύζευξης μπορεί εναλλακτικά να έχει την ακόλουθη μορφή:

$$\frac{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_N}{P_i}$$

Οι προηγούμενοι κανόνες εφαρμόζονται στο αρχικό σύνολο προτάσεων της λογικής που αποτελεί τη γνώση του συστήματος μέχρι να παραχθεί η προς απόδειξη πρόταση. Από τους πλέον γνωστότερους κανόνες συμπερασμού είναι ο "*τρόπος του θέτειν*" (*modus ponens*). Σύμφωνα με αυτόν, εάν είναι γνωστή η αλήθεια των προτάσεων P και $P \rightarrow Q$ μπορούμε να συνάγουμε ότι η πρόταση Q είναι αληθής. Δηλαδή:

$$\frac{P, P \rightarrow Q}{Q} \qquad (\textit{modus ponens})$$

Έτσι για παράδειγμα, από την αρχική γνώση του συστήματος που περιγράφεται από τις προτάσεις:

P: "*Ο Νίκος είναι προγραμματιστής*"
$P \rightarrow Q$: *Εάν* "*Ο Νίκος είναι προγραμματιστής*", *τότε* "*Ο Νίκος έχει υπολογιστή*"

χρησιμοποιώντας τον κανόνα συμπερασμού modus ponens μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

Q: "*Ο Νίκος έχει υπολογιστή*"

Μια διαδικασία απόδειξης (*proof procedure*) αποτελείται από ένα σύνολο κανόνων συμπερασμού Δ και έναν αλγόριθμο εφαρμογής τους, βάσει των οποίων εξάγονται (αποδεικνύονται) τα απαιτούμενα συμπεράσματα. Υπάρχουν δύο σημαντικές έννοιες σε κάθε διαδικασία απόδειξης. Η πρώτη αφορά την ορθότητα της παραγόμενης γνώσης ενώ η δεύτερη την ικανότητα της διαδικασίας να εξαγάγει όλα τα δυνατά συμπεράσματα. Έτσι μια αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται *ορθή* (*sound*) όταν όλα τα συμπεράσματα που εξάγονται αποτελούν και λογικές συνεπαγωγές του αρχικού συνόλου των τύπων, δηλαδή για κάθε P όπου $S \vdash_\Delta P$ ισχύει και $S \models P$. *Πλήρης* (*complete*) ονομάζεται μια αποδεικτική διαδικασία η οποία για κάθε τύπο P ο οποίος λο-

Η αρχή της ανάλυσης

Η σπουδαιότητα της αρχής της ανάλυσης εντοπίζεται στο γεγονός ότι είναι ο μοναδικός κανόνας που απαιτείται για την εξαγωγή όλων των ορθών συμπερασμάτων σε μια αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της "*εις άτοπο απαγωγής*" (*refutation*). Οπότε, η διαδικασία απόδειξης που προκύπτει είναι ορθή και πλήρης, όπως και η αντίστοιχη της προτασιακής λογικής.

Στην απλή περίπτωση, η *αρχή της ανάλυσης* (*resolution*) περιλαμβάνει προτάσεις οι οποίες περιέχουν το πολύ δύο λεκτικά στοιχεία (literals), όπως φαίνεται παρακάτω:

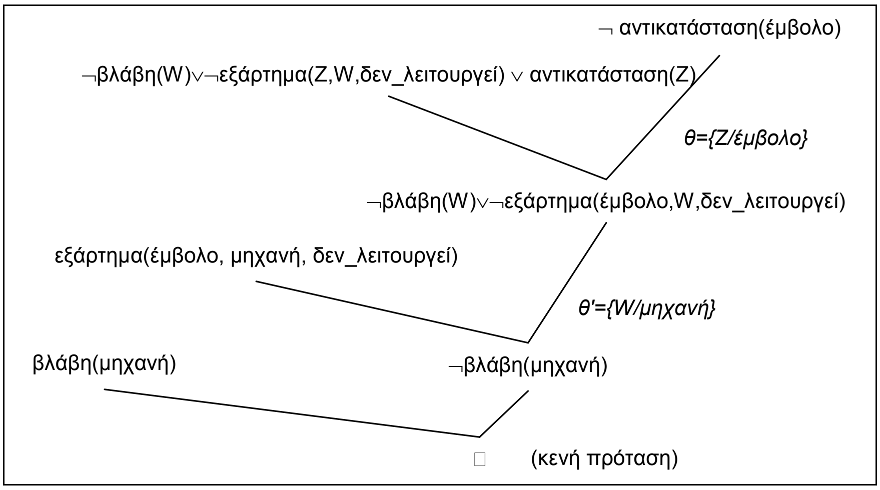
$$\frac{p \vee \neg q,\ z \vee q'}{\theta(p \vee z)}$$

Τα λεκτικά στοιχεία q' και $\neg q$ ονομάζονται συμπληρωματικά ζεύγη και δεν είναι ανάγκη να είναι "απολύτως" όμοια, αλλά να ενοποιούνται με κατάλληλες αντικαταστάσεις (ενοποιητής θ). Οι αντικαταστάσεις μεταβλητών που προκύπτουν εφαρμόζονται στο αναλυθέν (resolvent) $p \vee z$. Στη γενική περίπτωση οι προτάσεις περιλαμβάνουν περισσότερα λεκτικά στοιχεία:

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_m \vee \neg q \\ z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee \ldots \vee z_n \vee q' \end{array}}{\theta(p_1 \vee p_2 \vee p_3 \vee \ldots \vee p_m \vee z_1 \vee z_2 \vee z_3 \vee \ldots \vee z_n)}$$

όπου θ οι αντικαταστάσεις μεταβλητών (ενοποιητής) που προκύπτουν από την ενοποίηση των q' και $\neg q$. Όπως είναι φανερό, οι διαδικασίες αντικατάστασης και ενοποίησης που παρουσιάστηκαν στα προηγούμενα αποτελούν βασικά εργαλεία στην εφαρμογή της συγκεκριμένης αποδεικτικής διαδικασίας.

Όπως και στην προτασιακή λογική, η διαδικασία απόδειξης περιλαμβάνει τη εισαγωγή της άρνησης της προς απόδειξης πρότασης στο αρχικό σύνολο προτάσεων που αποτελεί τη γνώση και εφαρμογή του κανόνα της ανάλυσης μέχρι το σύστημα να εξαγάγει την κενή πρόταση (άτοπο), η οποία αναπαρίσταται με το σύμβολο □.



Σχήμα 9.3: Απόδειξη κατηγορηματικής λογικής βασισμένη στην αρχή της ανάλυσης.

- Τέλος, λόγω του ισχυρού κανόνα `r7` και της προηγούμενης αναιρέσιμης απόδειξης ότι `flies(tweety)`, αποδεικνύεται αναιρέσιμα ότι `travelInAir(tweety)`. Από αυτό φαίνεται ότι οι ισχυροί κανόνες συμπεριφέρονται ως αναιρέσιμοι όταν η συνθήκη τους αποδεικνύεται αναιρέσιμα και όχι οριστικά.

Αντικρουόμενα λεκτικά

Όπως ήδη αναφέρθηκε, μία χρήσιμη μορφή αντικρουόμενων κανόνων είναι αυτοί που εξάγουν πολλαπλά (θετικά) συμπεράσματα τα οποία αλληλοεξουδετερώνουν το ένα το άλλο. Για παράδειγμα, έστω ότι σε ένα παιχνίδι (π.χ. σκάκι) πρέπει να γίνει μία κίνηση από έναν παίκτη και η στρατηγική του παίκτη εκφράζεται με κανόνες σε αναιρέσιμη λογική. Προφανώς θα υπάρχουν πολλαπλοί κανόνες οι οποίοι θα προτείνουν κίνηση, ανάλογα με διάφορες εκτιμήσεις και στρατηγικές που έχει αφομοιώσει ο παίκτης. Όλοι οι κανόνες θα έχουν κεφαλή της ίδιας μορφής $move(X_1,Y_1,X_2,Y_2)$, προτείνοντας τη μετακίνηση του κομματιού που βρίσκεται στο τετράγωνο (X_1,Y_1), στο τετράγωνο (X_2,Y_2). Κάθε κανόνας προτείνει διαφορετικές τιμές για τα X_i, Y_i. Στο τέλος, όμως, μόνο ένας από αυτούς τους κανόνες θα πρέπει να δώσει συμπέρασμα γιατί μόνο μία κίνηση επιτρέπεται τη φορά.

Στην αναιρέσιμη λογική μια τέτοια κατάσταση αναπαρίσταται με πολλαπλούς αντικρουόμενους κανόνες που έχουν το ίδιο (συντακτικά) συμπέρασμα. Όταν αληθεύουν περισσότεροι του ενός τέτοιοι κανόνες προσπαθούν ο καθένας να εξάγει ως συμπέρασμα κάποιο (θετικό) λεκτικό (literal). Επειδή μόνο ένα τέτοιο λεκτικό πρέπει να εξαχθεί στο τέλος, τα λεκτικά αυτά ονομάζονται *αντικρουόμενα λεκτικά* (*conflicting literals*).

Αν δεν υπάρχει κάποια σχέση υπεροχής μεταξύ των κανόνων, τότε τα αντικρουόμενα λεκτικά αλληλοεξουδετερώνονται μεταξύ τους και δεν εξάγεται κανένα ως συμπέρασμα. Αν όμως κάποιοι από τους κανόνες είναι ανώτεροι από κάποιους άλλους, τότε σε περίπτωση σύγκρουσης προτιμώνται τα συμπεράσματά τους.

Το παρακάτω παράδειγμα θα μπορούσε να είναι τμήμα της τιμολογιακής πολιτικής κάποιου διαδικτυακού καταστήματος. Ο κανόνας `r1` εκφράζει τη γενική γνώση ότι όταν κάποιος `Z` αγοράζει το αγαθό `X` το οποίο κοστίζει `Y` τότε πληρώνει ακριβώς τόσα. Ο κανόνας `r2` εκφράζει την εξαίρεση ότι όταν κάποιος πληρώνει χρησιμοποιώντας μία συγκεκριμένη πιστωτική κάρτα με την οποία έχει συνεργασία το κατάστημα τότε έχει 10% έκπτωση.

```
r1: buys(Z,X), costs(X,Y) ⇒ pays(Z,X,Y)
r2: buys(Z,X), costs(X,Y), paysByCard(Z,goldXYZBankCard) ⇒ pays(Z,X,0.9*Y)
   r2 > r1
```

Το συγκεκριμένο ζεύγος κανόνων εκφράζει αντικρουόμενη γνώση για αλληλοαντικρουόμενα θετικά συμπεράσματα (αντικρουόμενα λεκτικά). Το γεγονός ότι ο κανόνας `r2` είναι ανώτερος από τον `r1` επιτρέπει την εξαγωγή ενός μόνο συμπεράσματος από τον κανόνα `r2` όταν ικανοποιείται η συνθήκη και των δύο κανόνων.

Πλεονεκτήματα

Τα κυριότερα πλεονεκτήματα της αναιρέσιμης λογικής είναι:

- Αυξημένες δυνατότητες αναπαράστασης γνώσης, με τη χρήση γεγονότων, ισχυρών και αναιρέσιμων κανόνων και προτεραιοτήτων μεταξύ τους.
- Δυνατότητα εξαγωγής συμπερασμάτων με μερική γνώση των καταστάσεων (*incomplete knowledge*) αλλά και υπό την παρουσία αντιφατικών πληροφοριών (*contradictory knowledge*).
- Μικρή υπολογιστική πολυπλοκότητα των μηχανισμών εξαγωγής συμπερασμάτων.

Βιβλιογραφία

Υπάρχει ένα πλήθος βιβλίων που αφορούν τη μαθηματική λογική, τόσο στην ελληνική, όπως τα [Τζουβάρας, 1992] και [Μητακίδης, 1992], όσο και στην ξένη βιβλιογραφία. Αναφέρονται ενδεικτικά το [Robinson, 1979] και [Mendelson, 1979], καθένα από τα οποία αποτελεί μια πολύ καλή εισαγωγή στη λογική. Επίσης εκτεταμένες εισαγωγές στη λογική, που επικεντρώνονται κυρίως στη χρήση της στην ΤΝ, περιέχονται σε κλασικά αγγλόφωνα εισαγωγικά συγγράμματα της ΤΝ όπως τα [Russell & Norvig, 2003] και [Luger, 2002] και [Nilson, 1998]. Η αρχή της ανάλυσης προτάθηκε από τον Robinson στην κλασική εργασία [Robinson, 1965].

Για τη μη-μονότονη λογική ξεχωρίζουν το [Marek & Truszczynski, 1993] για τη συλλογιστική των εύλογων υποθέσεων και τις μη-μονότονες τροπικές λογικές και το [Antoniou, 1997] για την αναιρέσιμη λογική. Τέλος, τα συστήματα TMS και ATMS παρουσιάζονται στις εργασίες [McAllester, 1980] και [De Kleer, 1986], αντίστοιχα.

Ασκήσεις - Ερωτήσεις

1. Αποδείξτε με τη χρήση πινάκων αλήθειας ότι:
   α) ο τύπος $P \vee \neg P$ είναι ταυτολογία
   β) ο τύπος $P \wedge \neg P$ είναι αντίφαση
   γ) ισχύουν οι νόμοι De Morgan

2. Χρησιμοποιώντας τον αλγόριθμο ενοποίησης που δόθηκε σε σχετική ενότητα, βρείτε το γενικότερο ενοποιητή των παρακάτω λογικών τύπων:

πατέρας(*νίκος*, *X*)	*πατέρας*(*Y*, *θανάσης*)
επάγγελμα(*X*, *μισθός*(*υψηλός*), *ωράριο*(*12*))	*επάγγελμα*(*νίκος*, *Y*, *Z*)
μηχανή(*μέρος*(*έμβολο*), *λειτουργεί*)	*μηχανή*(*X*, *βλάβη*)

3. Θεωρήστε τη βάση γνώσης του ζωικού βασίλειου που δόθηκε στην ενότητα της κατηγορηματικής λογικής.
   α) Μετασχηματίστε τις προτάσεις που δίνονται, στην προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής.