Κεφάλαιο 13

Αβεβαιότητα

Τεχνητή Νοημοσύνη - Β' Έκδοση

Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου

Αβέβαιη Γνώση

- Κυριότερες πηγές αβεβαιότητας:
  - **Ανακριβή δεδομένα** (*imprecise data*).
  - **Ελλιπή δεδομένα** (*incomplete data*)
  - **Υποκειμενικότητα** ή/και ελλείψεις στην περιγραφή της γνώσης
  - Κάθε είδους **περιορισμοί** που κάνουν το όλο πλαίσιο λήψης απόφασης ατελές.
- Ανάγκη ύπαρξης "μη ακριβών" μεθόδων συλλογισμού.
  - *Θεωρία Πιθανοτήτων*
  - *Συντελεστές Βεβαιότητας* (*Certainty Factors*)
  - *Θεωρία Dempster-Shafer*
  - *Ασαφής Λογική* (*Fuzzy Logic*).

Θεωρία Πιθανοτήτων

- Αν *E* είναι ένα γεγονός, η *άνευ συνθηκών πιθανότητα* (*unconditional probability*) *P*(*E*) να συμβεί το γεγονός εκφράζεται με έναν πραγματικό αριθμό για τον οποίο ισχύουν:
  - $0 \leq P(E) \leq 1$
  - $P(E) = 1$ αν E σίγουρο γεγονός
  - $P(E) + P(\neg E) = 1$
- *Πιθανότητα υπό συνθήκη* (*conditional probability*):
  - Η πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα *H* δεδομένης της ισχύος μόνο του γεγονότος *E*.

$$P(H \mid E) = \frac{P(H \wedge E)}{P(E)}$$

- Ιδιότητες
  - *Προσθετική Ιδιότητα*: $P(A \vee B) = P(A) + P(B) - P(A \wedge B)$
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο ανεξάρτητα γεγονότα A και B*: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B)$
  - *Πολ/στική Ιδιότητα για δύο μη ανεξάρτητα γεγονότα A και B*: $P(A \wedge B) = P(A) \bullet P(B|A)$

Παράδειγμα

- Έστω ότι έχουμε <u>ένα</u> ζάρι:
- $P(A)$ = P(περιττός αριθμός) = 3/6 = 0.5
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,3,5) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- $P(B)$ = P(αριθμός ≤ 3) = 3/6 = 0.5
  - γιατί υπάρχουν 3 δυνατές τιμές (1,2,3) από σύνολο 6 δυνατών τιμών (1,2,3,4,5,6)
- $P(B|A)$ = P(αριθμός ≤ 3 δεδομένου ότι είναι περιττός) = 2/3
  - γιατί υπάρχουν 2 δυνατές τιμές (1,3) από σύνολο 3 δυνατών τιμών (1,3,5)
- $P(A \wedge B)$ = P(περιττός αριθμός και ≤ 3) = $P(A) * P(B|A) = 0.5*2/3 = 0.33$
- $P(A \vee B)$=P(περιττός ή ≤ 3) = $P(A) + P(B) - P(A \wedge B) = 0.5+0.5-0.33=0.67$ (προσθετική ιδιότητα)

Ο Νόμος του Bayes (*Bayes' rule*)

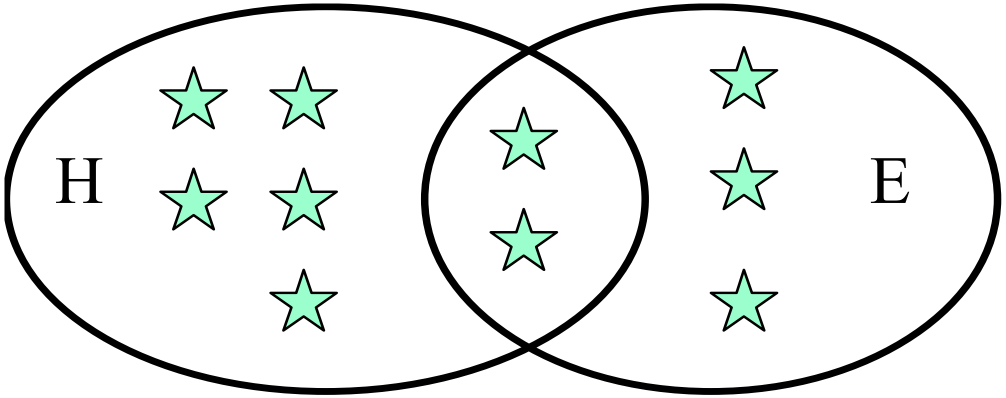
- Επιτρέπει τον υπολογισμό πιθανοτήτων υπό συνθήκη με χρήση άλλων πιθανοτήτων που είναι ευκολότερο να υπολογιστούν.
- **Χρήση εκτιμήσεων αντί συχνοτήτων εμφάνισης γεγονότων.**
- Η απλούστερη εκδοχή του *νόμου του Bayes*:

$$P(H \mid E) = \frac{P(E \mid H) \cdot P(H)}{P(E)}$$

  - Πιο εύκολο να χρησιμοποιηθεί, συγκριτικά με την σχέση της *πιθανότητας υπό συνθήκη*.
  - Αν Η μία ασθένεια και Ε ένα σύμπτωμα που σχετίζεται με αυτήν, τότε για τον υπολογισμό της *πιθανότητας υπό συνθήκη* απαιτείται πληροφορία που συνήθως δεν είναι διαθέσιμη:
    - Πόσοι άνθρωποι στον κόσμο πάσχουν από την Η και ταυτόχρονα εμφανίζουν το σύμπτωμα Ε.
    - Πόσοι εμφανίζουν απλά το σύμπτωμα Ε.
  - Στο νόμο του Bayes:
    - Ένας γιατρός μπορεί να δώσει μία εκτίμηση για το πόσοι ασθενείς που έπασχαν από την ασθένεια Η εμφάνιζαν το σύμπτωμα Ε (ποσότητα P(E|H)). Αντίθετα, το κλάσμα των ασθενών με σύμπτωμα Ε που πάσχουν από την ασθένεια Η, δηλαδή ο όρος P(H|E), τις περισσότερες φορές είναι αδύνατο να εκτιμηθεί.
    - Το P(H) μπορεί να υπολογιστεί από στατιστικά στοιχεία για τον συνολικό πληθυσμό.
    - Το P(E) από στατιστικά στοιχεία του ίδιου του γιατρού.

Παράδειγμα 1

- Έστω τα δύο σύνολα *H* και *E* με επτά και πέντε γεγονότα αντίστοιχα από ένα συνολικό πληθυσμό δέκα γεγονότων.
- Το σχήμα μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τις απλές (άνευ συνθήκης) και τις υπό συνθήκη πιθανότητες με απλή εφαρμογή του ορισμού τους.



P(E) = 5/10 = 0.5
P(H) = 7/10 = 0.7
P(H|E) = 2/5 = 0.4
P(E|H) = 2/7 = 0.287514

- Στο παράδειγμα: P(H|E) * P(E) = P(E|H)*P(H)
- Γνωρίζοντας τρεις από τις πιθανότητες μπορούμε να υπολογίσουμε την τέταρτη.

Παράδειγμα 2

Ορισμοί Παραμέτρων

$P(H)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη

$P(E)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό

$P(E|H)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι έχει γρίπη

$P(E|\neg H)$ = η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό δεδομένου ότι δεν έχει γρίπη

Δεδομένα

$P(H)=0.0001 \qquad P(E|H)=0.8 \qquad P(E|\neg H)=0.1$

Ερωτήσεις

1) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος πυρετό;

$P(E) = P(E \wedge H) + P(E \wedge \neg H) =$

(από ορισμό πιθαν. υπό συνθήκη)

$= P(E|H)*P(H) + P(E|\neg H)* P(\neg H) =$

$= 0.8 * 0.0001 + 0.1*(1-0.0001) =$

$= 0.0008 + 0.09999 = 0.10007$

2) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι έχει πυρετό;

$P(H|E) = P(H)*P(E|H)/P(E) =$ *(Bayes)*

$= 0.0001 * 0.8/0.10007 =$

$= 0.0007994$

3) Ποια η πιθανότητα να έχει κάποιος γρίπη δεδομένου ότι δεν έχει πυρετό;

$P(H|\neg E) = P(H)*P(\neg E|H)/P(\neg E) =$

(σχέση Bayes με ¬E αντί E)

$= 0.0001*(1-0.8)/(1-0.10007) =$

$= 0.0000222$

Γενική Σχέση του Νόμου του Bayes

- Η πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα *H* δεδομένης της ισχύος των γεγονότων $E_1, E_2, ..., E_k$:

$$P\left(H \mid E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k\right) = \frac{P\left(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k \mid H\right) \bullet P(H)}{P\left(E_1 \wedge E_2 \wedge \cdots \wedge E_k\right)}$$

- **Πρόβλημα χρήσης**: για m πιθανές ασθένειες και n δυνατά συμπτώματα από τα οποία εμφανίζονται τα k, απαιτούνται $(m \cdot n)^k + m + n^k$ τιμές πιθανοτήτων, αριθμός υπερβολικά μεγάλος.
- **Απλούστερη περίπτωση**: αν τα διάφορα γεγονότα Ε θεωρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο, τότε απαιτούνται μόνο $m \cdot n + m + n$ τιμές πιθανοτήτων.

Χρήση Θεωρίας Πιθανοτήτων - Συμπεράσματα

- είτε τα διάφορα γεγονότα θεωρούνται ανεξάρτητα (ευκολότεροι υπολογισμοί σε βάρος της ακρίβειας των συλλογισμών)
- ή καταγράφονται αναλυτικά όλες οι πιθανότητες και οι μεταξύ του συσχετίσεις (ακριβή συμπεράσματα, με υψηλό όμως υπολογιστικό κόστος).
- Εναλλακτική προσέγγιση: Συντελεστές βεβαιότητας.

Συντελεστές Βεβαιότητας (*Certainty Factors*) (1/2)

- Αριθμητικές τιμές που εκφράζουν τη βεβαιότητα για την αλήθεια μιας πρότασης ή γεγονότος.
- if *γεγονός* then *υποθετικό συμπέρασμα* με βεβαιότητα CF
  Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8
- Παίρνουν τιμές στο διάστημα [-1, +1]
  - –1 : απόλυτη βεβαιότητα για το ψευδές της πρότασης.
  - +1 : απόλυτη βεβαιότητα για την αλήθεια της πρότασης.
  - 0 : άγνοια.
- Τιμές βεβαιότητας και στην τιμή του γεγονότος του κανόνα:
  Παράδειγμα: if πυρετός CF_1 0.7 then γρίπη CF 0.8
  - τελική βεβαιότητα κανόνα: 0.7x0.8=0.56
- Αν υπάρχουν περισσότερα από ένα γεγονότα στο αριστερό τμήμα του κανόνα τα οποία συνδέονται με AND (ή OR) τότε ως συντελεστής βεβαιότητας του αριστερού τμήματος θεωρείται η μικρότερη (ή η μεγαλύτερη) τιμή CF που εμφανίζεται.

Συντελεστές Βεβαιότητας (*Certainty Factors*) (2/2)

- Αν δύο διαφορετικοί κανόνες συνάγουν το ίδιο υποθετικό συμπέρασμα με βεβαιότητες CF_p και CF_n, τότε η συνολική βεβαιότητα είναι:
  - Αν CF_p και $CF_n > 0$, τότε: $CF = CF_p + CF_n \cdot (1 - CF_p) = CF_p + CF_n - CF_n \cdot CF_p$
  - Αν CF_p και $CF_n < 0$, τότε: $CF = CF_p + CF_n \cdot (1 + CF_p) = CF_p + CF_n + CF_n \cdot CF_p$
  - Αν CF_p και CF_n ετερόσημα, τότε: $CF = \dfrac{CF_p + CF_n}{1 - \min(|CF_p|, |CF_n|)}$
- Παράδειγμα: if πυρετός then γρίπη CF 0.8
  if βήχας then γρίπη CF 0.5
- **Συμπερασματικά**:
  - Αντί για συχνότητες εμφάνισης γεγονότων που πρέπει να μετρηθούν, χρησιμοποιούνται συντελεστές βεβαιότητας που έχουν εκτιμηθεί από ειδικούς.
  - Οι υπολογισμοί κατά το συνδυασμό βεβαιοτήτων είναι απλούστεροι, λόγω της παραδοχής της ανεξαρτησίας των γεγονότων.
  - Πρέπει να αποφεύγεται η ταυτόχρονη χρήση κανόνων που αναστρέφουν τη σχέση αιτίας-αποτελέσματος. Π.χ. *if A then B* και *if B then A*

Παράδειγμα

- Έστω ότι δύο κανόνες οδηγούν στο ίδιο υποθετικό συμπέρασμα B, κάτω όμως από διαφορετικές παραδοχές, δηλαδή:

  if A then B CF 0.8

  if C AND D AND E then B CF 0.6

- Αν ο χρήστης εισάγει τα δεδομένα A, C, D και E με βεβαιότητες: CF(A)=0.5, CF(C)=0.9, CF(D)=0.7 και CF(E)=0.5 τότε:

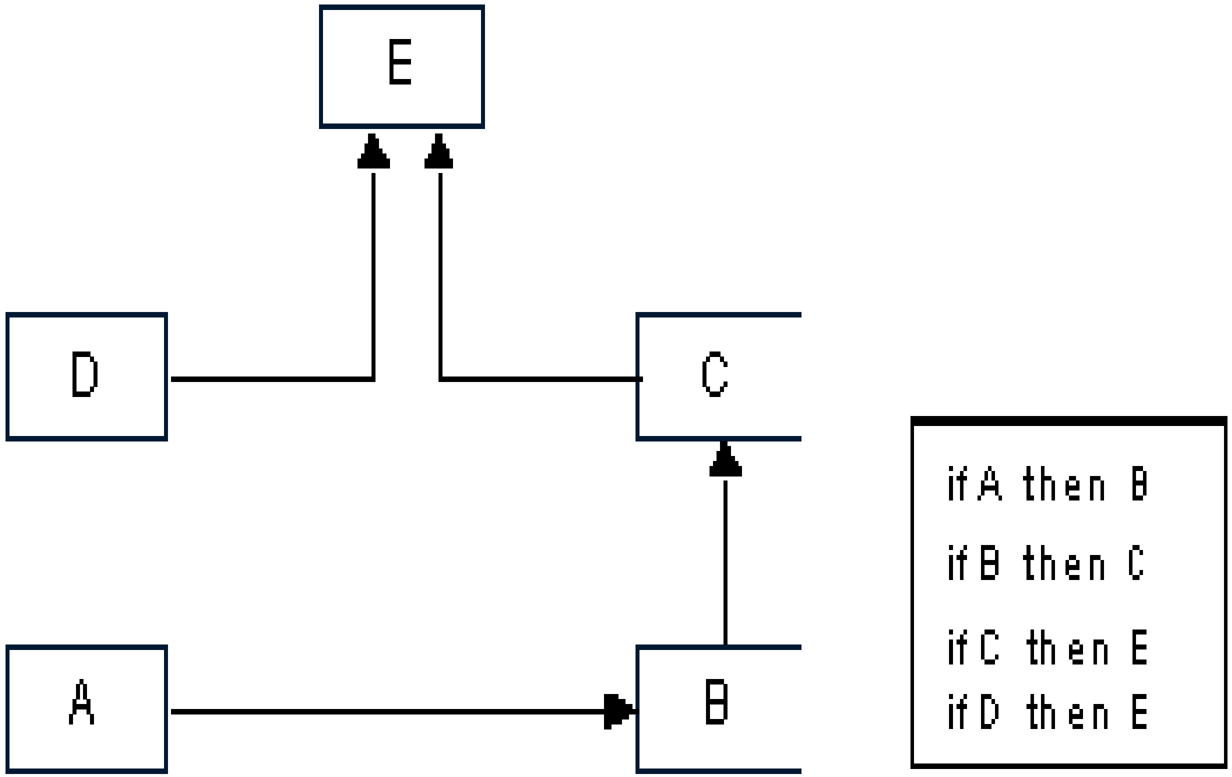
- Η ενεργοποίηση του πρώτου κανόνα δίνει: $CF_p(B)=0.5 * 0.8 = 0.4$

- Η ενεργοποίηση του δεύτερου κανόνα δίνει:
  $CF_n(B)=0.6 * \min(0.9, 0.7, 0.5) = 0.6 * 0.5 = 0.3$

- Επειδή τα CF_p και CF_n είναι και τα δύο θετικά, η συνολική βεβαιότητα του υποθετικού συμπεράσματος B θα είναι:
  $CF(B) = 0.4 + 0.3 - (0.4 \times 0.3) = 0.58$

Δίκτυα Πιθανοτήτων (*Bayesian Probability Networks*)

- Αντιμετωπίζουν το πρόβλημα της αλληλεπίδρασης των πιθανοτήτων.
- Στον πραγματικό κόσμο τα διάφορα γεγονότα δεν αλληλεπιδρούν όλα το ένα με το άλλο αλλά μερικώς.
  - Δεν χρειάζεται να υπολογίζονται οι πιθανότητες όλων των συνδυασμών γεγονότων.
- Απαγορεύεται η ύπαρξη βρόχων μέσα στο δίκτυο.
- Δεν γίνεται ταυτόχρονη χρήση κανόνων που αντιστρέφουν την σχέση αιτίας-αποτελέσματος.



Δίκτυα Συμπερασμού (Inference Networks) (1/2)

- Παραλλαγή των δικτύων πιθανοτήτων.
- Οι κανόνες υποδηλώνουν μία "χαλαρή" συνεπαγωγή:

  if *γεγονός* then *υποθετικό συμπέρασμα* με βαθμό ισχύος *S*

- Περίπτωση Υλοποίησης: με τη χρήση των μεγεθών
  - ***Εύνοια Γεγονότος*** *(Odds - O)*
  - ***Λογική Επάρκεια*** *(Logical Sufficiency – LS)*
  - ***Λογική Αναγκαιότητα*** *(Logical Necessity – LN)*

$$\mathrm{O}(\mathrm{E}) = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{E})}{1 - \mathrm{P}(\mathrm{E})} \qquad \mathrm{LS} = \frac{\mathrm{P}(\mathrm{E} \mid \mathrm{H})}{\mathrm{P}(\mathrm{E} \mid \neg\mathrm{H})} = \frac{\mathrm{O}(\mathrm{H} \mid \mathrm{E})}{\mathrm{O}(\mathrm{H})}$$

$$\mathrm{LN} = \frac{\mathrm{P}(\neg\mathrm{E} \mid \mathrm{H})}{\mathrm{P}(\neg\mathrm{E} \mid \neg\mathrm{H})} = \frac{\mathrm{O}(\mathrm{H} \mid \neg\mathrm{E})}{\mathrm{O}(\mathrm{H})}$$

Δίκτυα Συμπερασμού (Inference Networks) (2/2)

- Γενική μορφή κανόνα σε δίκτυα συμπερασμού:

$$E \xrightarrow[(LS,LN)]{} \underset{P_o(H)}{H}$$

  - *$P_o(H)$: πιθανότητα να ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα H όταν απουσιάζει οποιαδήποτε ένδειξη για την ισχύ του γεγονότος E.*
  - *Αν γίνει γνωστή η ύπαρξη του E τότε και η πιθανότητα του H αλλάζει σε P(H|E).*
  - *Όλες οι αλλαγές προωθούνται μέσα στο δίκτυο των κανόνων*

.

- **Παράδειγμα** δικτύου συμπερασμού:

$$X \xrightarrow[(LS_1=4,\ LN_1=0.5)]{} \underset{p_o(Y)=0.1}{Y} \xrightarrow[(LS_2=10,\ LN_2=0.2)]{} \underset{p_o(Z)=0.2}{Z}$$

  - *$P_o(Y)$ και $P_o(Z)$: αρχικές τιμές πιθανότητας για τα Y και Z, χωρίς να υπάρχει οποιασδήποτε γνώση για το X*
  - *Έστω ότι* η τιμή του X γίνεται γνωστή. Μετά από πράξεις, η τελική μορφή του δικτύου:

$$X \xrightarrow[(LS_1=4,\ LN_1=0.5)]{} \underset{P(Y|X)=0.307}{Y} \xrightarrow[(LS_2=10,\ LN_2=0.2)]{} \underset{P(Z|X)=0.252}{Z}$$

Προσέγγιση Dempster-Shafer (D-S) (1/2)

- Δεν απαιτείται η συλλογή όλων των απλών και των υπό συνθήκη πιθανοτήτων.
- Λογισμός με αριθμητικές τιμές *πεποίθησης* (*belief*)
- *Πλαίσιο διάκρισης* (*frame of discernment*)

.

- Αν U={A, B, C} πιθανές ασθένειες τότε:

  Pow(U) = { {}, {A}, {B}, {C}, {A, B}, {A, C}, {B, C}, {A, B, C} }

  πιθανές διαγνώσεις.
- Διαζευγμένες Προτάσεις: {A, B} σημαίνει "ασθένεια A ή B".
- Στοιχεία του U που δεν ανήκουν σε ένα στοιχείο του Pow(U), (π.χ. η ασθένεια C στο {A, B}), κάνουν σαφή την άρνηση του αντίστοιχου υποθετικού συμπεράσματος.
- {}: *null hypothesis*

Προσέγγιση Dempster-Shafer (2/2)

- Η *βασική κατανομή πιθανότητας* (*basic probability assignment - bpa*) είναι μία απεικόνιση: m: Pow(U) → [0,1]
  δηλαδή το μέτρο της πεποίθησης που υπάρχει για το κατά πόσο ισχύει το υποθετικό συμπέρασμα που εκφράζεται με το συγκεκριμένο στοιχείο του U.
  - *η πεποίθηση m({A, B})=0.3, δε μοιράζεται στα {A} και {B} αλλά αφορά το {A, B}.*
  - *ισχύει m({})=0*
  - $\sum_{X \in Pow(U)} m(X) = 1$
  - *Η ποσότητα m(X) εκφράζει το πόσο ισχυρή είναι η πεποίθηση για το ότι ένα συγκεκριμένο στοιχείο* του U ανήκει στο X αλλά όχι σε κάποιο από τα τυχόν υποσύνολα του X.

- Η συνολική πεποίθηση (*belief*) ότι ένα στοιχείο του U ανήκει στο X καθώς και στα τυχόν υποσύνολα του X συμβολίζεται με *Bel(X)*

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

Dempster-Shafer vs. Bayes

- Bayes: η απουσία άλλων ενδείξεων για τις δυνατές εκδοχές τις καθιστά ισοπίθανες.
- Dempster-Shafer: η απουσία κάποιων ενδείξεων θέτει την πιθανότητα (*likelihood*) κάθε εκδοχής κάπου στο διάστημα [0, 1].

Κανόνας Dempster-Shafer

- Αν m_1 και m_2 δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (βασικές κατανομές πιθανότητας) που αποδίδουν κάποιο βαθμό πεποίθησης στα στοιχεία του Pow(U), τότε αυτές συνδυάζονται σε μία τρίτη εκτίμηση $m_3=m_1 \oplus m_2$ με τρόπο που ορίζεται με τον *κανόνα D-S*:

$$\boxed{\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y \in U : X \cap Y = A}} m_1(\mathrm{X}) \bullet m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y \in U : X \cap Y = \varnothing}} m_1(\mathrm{X}) \bullet m_2(\mathrm{Y})}}$$

Παράδειγμα: Διάγνωση Ασθένειας

- Έστω $U=\{A, B, C\}$ το σύνολο των δυνατών ασθενειών που μπορεί να διαγνωσθούν.
- Πιθανές Διαγνώσεις $Pow(U)=\{\{\}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A,B\}, \{A,C\}, \{B,C\}, \{A,B,C\}\}$
- $m(\ \{\{\ \}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\ \}\ ) = 1$
  - υποδηλώνει τη βεβαιότητα ότι η διάγνωση βρίσκεται κάπου στα στοιχεία του $Pow(U)$ αλλά ελλείψει άλλων ενδείξεων δεν είναι δυνατό να δοθεί ιδιαίτερη βαρύτητα σε κάποιο
  - Bayes: θα έπρεπε κάθε στοιχείο του $Pow(U)$ να θεωρηθεί ισοπίθανο
- Έστω ότι γίνεται διαθέσιμη επιπλέον πληροφορία, (π.χ. πραγματοποιούνται ιατρικές εξετάσεις) και προκύπτει ότι η ασθένεια είναι μία από τις A ή B με βαθμό πίστης 0.7
  - $m1(\ \{A, B\}\ ) = 0.7$
  - $m1(\ \{\{\ \}, \{A\}, \{B\}, \{C\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \{A, B, C\}\}\ ) = 0.3$
  - Δηλαδή, η έλλειψη πίστης σε ένα από τα υποθετικά συμπεράσματα του $Pow(U)$, ισοδυναμεί αυτόματα με ισόποσο βαθμό πίστης στα υπόλοιπα στοιχεία του $Pow(U)$, χωρίς όμως να δίνεται ιδιαίτερη προτίμηση σε κάποιο από αυτά.
  - Bayes: απαιτείται ο υπολογισμός μεγάλου αριθμού υπό συνθήκη πιθανοτήτων, κάτι που είναι υπολογιστικά ακριβό και πολλές φορές αδύνατο.
- Πώς μπορεί να συνδυαστούν δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις (π.χ. δύο ιατρών) σε μία;

Παράδειγμα: Συνδυασμός Διαγνώσεων

- Έστω ότι δύο γιατροί εξετάζουν ανεξάρτητα τον ασθενή και δίνουν την εκτίμησή τους m_1 και m_2 αντίστοιχα, για την αρρώστια από την οποία αυτός πάσχει.

	Γιατρός 1		**Γιατρός 2**	
Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	**m_1**	**Bel_1**	**m_2**	**Bel_2**
{A}	0.05	0.05	0.15	0.15
{B}	0	0	0	0
{C}	0.05	0.05	0.05	0.05
{A, B}	0.15	0.2	0.05	0.2
{A, C}	0.1	0.2	0.2	0.4
{B, C}	0.05	0.1	0.05	0.1
{A, B, C}	0.6	1	0.5	1

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

- π.χ. $Bel_1(\{A,B\}) = m_1(\{A,B\}) + m_1(\{A\}) + m_1(\{B\}) = 0.015 + 0.05 + 0 = 0.2$
- Οι δύο ανεξάρτητες εκτιμήσεις m_1 και m_2 μπορεί να συνδυαστούν στην m_3 χρησιμοποιώντας τον κανόνα Dempster-Shafer:

$$\underset{A \in Pow(U)}{m_3(\mathrm{A})} = m_1 \oplus m_2(\mathrm{A}) = \frac{\sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}) : \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \mathrm{A}} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}{1 - \sum_{\mathrm{X,Y} \in Pow(\mathrm{U}) : \mathrm{X} \cap \mathrm{Y} = \varnothing} m_1(\mathrm{X}) \cdot m_2(\mathrm{Y})}$$

Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων (1/2)

$m_3=m_1 \oplus m_2$		m_1						
		{A}	{B}	{C}	{A,B}	{A,C}	{B,C}	{A,B,C}
m_2		0.05	0	0.05	0.15	0.1	0.05	0.6
{A}	0.15	{A} .0075	{ } 0	{ } .0075	{A} .0225	{A} .015	{ } .0075	{A} .09
{B}	0	{ } .0	{B} 0	{ } .0	{B} .0	{ } .0	{B} .0	{B} .0
{C}	0.05	{ } .0025	{ } 0	{C} .0025	{ } .0075	{C} .005	{C} .0025	{C} .03
{A,B}	0.05	{A} .0025	{B} 0	{ } .0025	{A,B} .0075	{A} .005	{B} .0025	{A,B} .03
{A,C}	0.2	{A} .01	{ } 0	{C} .01	{A} .03	{A,C} .02	{C} .01	{A,C} .012
{B,C}	0.05	{ } .0025	{B} 0	{C} .0025	{B} .0075	{C} .005	{B,C} .0025	{B,C} .03
{A,B,C}	0.5	{A} .025	{B} 0	{C} .025	{A,B} .075	{A,C} .05	{B,C} .025	{A,B,C} .3

Παράδειγμα: Συνδυασμός Εκτιμήσεων (2/2)

Δυνατές περιπτώσεις διάγνωσης	m_3	Bel_3
{A}	0.21	0.21
{B}	0.01	0.01
{C}	0.09	0.09
{A, B}	0.12	0.34
{A, C}	0.20	0.50
{B, C}	0.06	0.16
{A, B, C}	0.31	1.00

$$Bel(X) = \sum_{Y \subseteq X} m(Y)$$

- Η αρχική εκτίμηση ότι η ασθένεια είναι μία από τις *A* ή *B* αποδυναμώθηκε.
  - η διάγνωση βρίσκεται μάλλον στο σύνολο $\{A,C\}$
  - επειδή $Bel_3(\{A\})>Bel_3(\{C\})$, αρχίζει να διαφαίνεται ότι η τελική διάγνωση είναι η *A*
- Η παραπάνω συνδυασμένη εκτίμηση μπορεί να συνδυαστεί εκ νέου με μια άλλη εκτίμηση (π.χ. 3^{ου} ιατρού).