Κεφάλαιο 9

Λογική

Τεχνητή Νοημοσύνη - Β' Έκδοση

Ι. Βλαχάβας, Π. Κεφαλάς, Ν. Βασιλειάδης, Φ. Κόκκορας, Η. Σακελλαρίου

Λογική

- Αποσαφήνιση και την τυποποίηση της διαδικασίας της ανθρώπινης σκέψης.
- Η *μαθηματική λογική* (*mathematical logic*) είναι η συστηματική μελέτη των *έγκυρων ισχυρισμών* (*valid arguments*).
  - Ένας *ισχυρισμός* (*argument*) αποτελείται από συγκεκριμένες *δηλώσεις* (*ή προτάσεις*), τις *υποθέσεις* (*premises*), και τα *συμπεράσματα* (*conclusions*).

```
Όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί,          (Δήλωση)
Ο Σωκράτης είναι άνθρωπος,              (Δήλωση)
επομένως, ο Σωκράτης είναι θνητός     (Συμπέρασμα)
```

- *Συμβολική λογική* (*symbolic logic*).
  - Οι ισχυρισμοί μελετώνται ανεξάρτητα από το θέμα το οποίο πραγματεύονται.

P: $\forall$**X άνθρωπος(X)** $\rightarrow$ **θνητός(X).**

Q: άνθρωπος(Σωκράτης)

R: θνητός(Σωκράτης).

P $\wedge$ **Q** $\models$ **R**

Σύνταξη και Σημασιολογία

- Απαιτείται ο ορισμός της *σύνταξης* (*syntax*) και της *σημασιολογίας* (*semantics*).
- Η *σύνταξη* καθορίζει τις επιτρεπτές ακολουθίες συμβόλων.
- Η *σημασιολογία* καθορίζει τις μεταξύ τους σχέσεις.
- Η *ερμηνεία*
  - αντιστοιχεί τα σύμβολα της γλώσσας στις οντότητες του κόσμου που αναπαρίσταται
  - επιτρέπει την απόδοση λογικών τιμών στις προτάσεις της γλώσσας.

Προτασιακή Λογική

- Στην προτασιακή λογική κάθε γεγονός του πραγματικού κόσμου
  - αναπαριστάται με μια *λογική πρόταση*,
  - χαρακτηρίζεται είτε ως *αληθής* (***T***-*true*) ή ως *ψευδής* (***F***-*false*)
- Οι λογικές προτάσεις (*άτομα* - *atoms*) αναπαριστώνται συνήθως από λατινικούς χαρακτήρες.
- Συνδυάζονται με τη χρήση *λογικών συμβόλων* ή *συνδετικών* (*connectives*)

Σύμβολο	**Ονομασία / Επεξήγηση**
$\wedge$	σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ")
$\vee$	διάζευξη (λογικό "Η")
□	άρνηση
$\rightarrow$	συνεπαγωγή ("ΕΑΝ ΤΟΤΕ")
$\leftrightarrow$	διπλή συνεπαγωγή ή ισοδυναμία ("ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ").

- Τρία σημεία στίξης
  - Δύο Παρενθέσεις "(", ")" και το κόμμα ","
- Ορθά δομημένοι τύποι (well formed formulae).

Παράδειγμα Χρήσης Συνδετικών

- Αναπαράσταση της ακόλουθης γνώσης με προτασιακή λογική:
  - **1η πρόταση: "επιδιώκω την ειρήνη"¨**
  - **2η πρόταση: "αποφεύγω πόλεμο"**
  - **3η πρόταση: "εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω πόλεμο"**
- Σε κάθε πρόταση αντιστοιχεί ένας λατινικός χαρακτήρας.
  - **P:"επιδιώκω την ειρήνη"**
  - **Q:"αποφεύγω τον πόλεμο"**
- Η 3η πρόταση αναπαριστάται με την χρήση του συνδετικού της συνεπαγωγής:
  - **$P \rightarrow Q$ "εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο"**

Σημασιολογία της Προτασιακής Λογικής

- Αντιστοιχεί μία τιμή αληθείας (αληθές ***T*** ή ψευδές ***F***) σ' έναν τύπο, βασισμένη σε μια ερμηνεία της γλώσσας.
- Μια *ερμηνεία* (*interpretation*)
  - αντιστοιχεί τιμές αληθείας στα άτομα, και
  - επεκτείνεται σε σύνθετους τύπους με χρήση ενός πίνακα αληθείας (truth table).

P	Q	$\neg P$	$P \vee Q$	$P \wedge Q$	$P \rightarrow Q$	$P \leftrightarrow Q$
T	***T***	***F***	***T***	***T***	***T***	***T***
T	***F***	***F***	***T***	***F***	***F***	***F***
F	***T***	***T***	***T***	***F***	***T***	***F***
F	***F***	***T***	***F***	***F***	***T***	***T***

- Έστω η ερμηνεία $I=\{I(P)=\mathbf{T}, I(Q)=\mathbf{T}\}$.
  - Σύμφωνα με αυτή την ερμηνεία και τον πίνακα αλήθειας ο τύπος $P \rightarrow Q$ είναι αληθής.
  - Ο τύπος $P \rightarrow Q$ *ικανοποιείται* από την ερμηνεία I.
  - *Μοντέλο* (*model*) του τύπου.

Ενδιαφέρουσες Περιπτώσεις Τύπων

- *Ταυτολογία (tautology)*: αληθής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
  - $P \vee \neg P$.
  - Εάν ο τύπος F είναι ταυτολογία τότε γράφεται $\models$F.
- *Αντίφαση (contradiction)*:ψευδής κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
  - $P \wedge \neg P$.
- Ένας τύπος *P συνεπάγεται λογικά* (*implication*) από τον τύπο *Q* εάν κάθε μοντέλο του *Q* είναι επίσης και μοντέλο του *P*.
  - Η περίπτωση συμβολίζεται ως $Q \models P$.
- Δύο τύποι *P* και *Q* ονομάζονται *ισοδύναμοι* (*equivalent*) εάν οι πίνακες αλήθειας τους είναι οι ίδιοι κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.
  - Η λογική ισοδυναμία ορίζεται με το σύμβολο $\Leftrightarrow$, πχ. $P \Leftrightarrow Q$.

Ορισμοί σε σύνολα τύπων

- Ένα σύνολο τύπων S ονομάζεται
  - *ταυτολογία*: κάθε ερμηνεία του συνόλου S ικανοποιεί κάθε τύπο του S.
  - *ικανοποιήσιμο* (*satisfiable*): υπάρχει μια τουλάχιστον ερμηνεία που να ικανοποιεί όλους τους τύπους του S,
  - *μη-ικανοποιήσιμο* (*unsatisfiable)* ή *αντίφαση*: δεν υπάρχει δυνατή ερμηνεία που να ικανοποιεί όλους τους τύπους του S.
- Μια πρόταση P *λογικά συνεπάγεται* (*implication ή entailment*) από ένα σύνολο S όταν κάθε ερμηνεία η οποία ικανοποιεί το S ικανοποιεί επίσης και το P και συμβολίζεται με $S \models P$.
- Δυο σύνολα προτάσεων S και F ονομάζονται *λογικά ισοδύναμα* εάν $S \models F$ και $F \models S$.
- Διαφορά της *λογικής ισοδυναμίας* και του *συνδετικού της ισοδυναμίας*
  - Η λογική ισοδυναμία ($\Leftrightarrow$) αφορά τη σημασιολογία των υπό εξέταση προτάσεων.
  - Το συνδετικό της ισοδυναμίας ($\leftrightarrow$) αποτελεί μέρος της σύνταξης της γλώσσας.
  - Το ίδιο ισχύει για τη λογική συνεπαγωγή ($\models$) και το συνδετικό της συνεπαγωγής ($\rightarrow$).

Παράδειγμα

- Παράδειγμα:
  - P: "επιδιώκω την ειρήνη"
  - Q: "αποφεύγω τον πόλεμο"
  - $P \rightarrow Q$ "εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο"
- Έστω η ερμηνεία $I=\{I(P)=t, I(Q)=t\}$. Τότε ο τελευταίος τύπος είναι αληθής.
- Αντίθετα η δήλωση $P \wedge Q \models P \rightarrow Q$, δηλώνει ότι κάθε ερμηνεία που ικανοποιεί τον τύπο $P \wedge Q$ ικανοποιεί επίσης και τον τύπο $P \rightarrow Q$.

Λογικές Ισοδυναμίες

- Υπάρχει ένα σύνολο ισοδυναμιών που χρησιμοποιούνται για την μετατροπή μιας πρότασης σε κάποια ισοδύναμή της
- Οι ισοδυναμίες είναι αληθείς κάτω από οποιαδήποτε ερμηνεία.

Ισοδυναμία		Ονομασία
(1)	$P \Leftrightarrow \neg\neg P$	**νόμος της διπλής άρνησης**
(2)	$(\neg P \lor \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \land Q)$	**νόμος De Morgan**
(3)	$(\neg P \land \neg Q) \Leftrightarrow \neg(P \lor Q)$	**νόμος De Morgan**
(4)	$(P \lor Q) \land R \Leftrightarrow (P \land R) \lor (Q \land R)$	**επιμερισμός ως προς την σύζευξη**
(5)	$(P \land Q) \lor R \Leftrightarrow (P \lor R) \land (Q \lor R)$	**επιμερισμός ως προς την διάζευξη**
(6)	$(P \rightarrow Q) \Leftrightarrow \neg P \lor Q$	**Οποιοσδήποτε τύπος της προτασιακής λογικής μπορεί να μετατραπεί σε ένα ισοδύναμο χωρίς την χρήση των συνδετικών της συνεπαγωγής και της ισοδυναμίας**
(7)	$(P \leftrightarrow Q) \Leftrightarrow (P \rightarrow Q) \land (Q \rightarrow P)$	

Κανονικές Μορφές

- *Κανονικές μορφές* (*canonical forms*): Μορφές των τύπων της λογικής
  - δεν εμφανίζονται καθόλου κάποια συνδετικά
  - ακολουθούν μια συγκεκριμένη δομή.
  - Π.χ. στη *Διαζευκτική* και *Συζευκτική* μορφή της λογικής, χρησιμοποιούνται μόνο τα συνδετικά της σύζευξης, διάζευξης και άρνησης.
- Κάθε τύπος μπορεί να μετατραπεί σε μια κανονική μορφή, χρησιμοποιώντας:
  - τις ισοδυναμίες για την απαλοιφή των συνδετικών της ισοδυναμίας και συνεπαγωγής
  - την κατάλληλη ομαδοποίηση των ατόμων μέσω των ισοδυναμιών του επιμερισμού
- Οι κανονικές μορφές της λογικής, είναι χρήσιμες για
  - την εύρεση της λογικής τιμής μιας πολύπλοκης έκφρασης.
  - την εξαγωγή νέας γνώσης.

Διαζευκτική Και Συζευκτική Κανονική Μορφή της Λογικής

- Στην *διαζευκτική κανονική μορφή της λογικής (disjunctive normal form)*, οι προτάσεις αποτελούνται από διαζεύξεις τύπων που μπορεί να είναι μόνο:
  - *λεκτικά* (*literals*) και
  - συζεύξεις λεκτικών

$$(Q \wedge R \wedge \neg S) \vee (V \wedge W) \vee (R \wedge S) \vee \ldots \vee (X \wedge Z)$$

- Στην *συζευκτική μορφή* της λογικής (*conjunctive normal form*) οι προτάσεις αποτελούνται από συζεύξεις διαζεύξεων, δηλαδή έχουν την μορφή:

$$(Q \vee R \vee \neg S) \wedge (V \vee W) \wedge (R \vee S) \wedge \ldots \wedge (X \vee Z)$$

Παράδειγμα Κανονικής Μορφής

- Έστω η ακόλουθη γνώση εκφρασμένη στη γενική μορφή της προτασιακής λογικής:

  " επιδιώκω την ειρήνη" ΚΑΙ "εάν επιδιώκω την ειρήνη, τότε αποφεύγω τον πόλεμο"

- Σε συμβολική μορφή:

$$P \wedge (P \rightarrow Q)$$

- Σε κανονική διαζευκτική μορφή:

$$(P \wedge \neg P) \vee (P \wedge Q)$$

  - που διαβάζεται ως:

    "επιδιώκω την ειρήνη" ΚΑΙ δεν "επιδιώκω την ειρήνη"

    'Η "επιδιώκω την ειρήνη" ΚΑΙ "αποφεύγω τον πόλεμο"

- Βοηθά στην εύρεση της λογικής τιμής του παραπάνω τύπου.
  - Για την ερμηνεία *I={I(P)=T, I(Q)=F}* ο τύπος είναι ψευδής.
  - Ο παραπάνω τύπος είναι αληθής μόνο για την ερμηνεία *I={I(P)=T, I(Q)=T}*,

Χρήση των Κανονικών Μορφών

- Απόδειξη ότι μια συγκεκριμένη λογική έκφραση αποτελεί ταυτολογία.
  - Μετατροπή σε διαζευκτική κανονική μορφή και να απόδειξη ότι μια από τις συζεύξεις αληθεύει πάντα.
- Εύρεση ερμηνείας που ικανοποιεί ένα τύπο.

Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπερασμάτων

- Έστω ένα σύνολο S καλά σχηματισμένων τύπων σε προτασιακή λογική.
- Η εξαγωγή συμπερασμάτων αφορά:
  - είτε την δημιουργία όλων των τύπων που λογικά συνεπάγονται από το S,
  - ή στο να διαπιστωθεί εάν ένας τύπος P λογικά συνεπάγεται από το S, δηλαδή εάν $S \models P$.
- Η εξαγωγή συμπερασμάτων υλοποιείται είτε
  - με πίνακες αλήθειας ή
  - με την λογική απόδειξη.

Πίνακες Αληθειας

- Οι *πίνακες αλήθειας* (*truth tables*), υπολογίζουν την λογική τιμή ενός τύπου.
- Ένας τέτοιος πίνακας αποτελείται από 2^N γραμμές όπου N είναι το πλήθος των ατόμων που περιέχονται στο τύπο.

P	Q	$P \lor Q$	$P \rightarrow (P \lor Q)$
T	T	T	T
T	F	T	T
F	T	T	T
F	F	F	T

- Απλούστερη μέθοδος εξαγωγής συμπερασμάτων
  - Ογκωδέστατοι πίνακες αλήθειας.
  - Π.χ. Η απόδειξη ενός τύπου που περιέχει 15 άτομα απαιτεί ένα πίνακα αλήθειας 2^{15} (32768) γραμμών!

Λογική Απόδειξη

- Μια *απόδειξη* (*proof*) είναι μια σειρά από βήματα:
  - Καθένα βήμα είναι η εφαρμογή ενός *κανόνα συμπερασμού* (*rule of inference*)
  - Απώτερος σκοπός: παραγωγή της αποδεικτέας πρότασης ή την κατάληξη σε άτοπο.

- Το γεγονός ότι ένας τύπος P μπορεί να αποδειχθεί από ένα αρχικό σύνολο τύπων S, βάσει ενός συνόλου κανόνων συμπερασμού Δ, συμβολίζεται ως $S \vdash_{\Delta} P$.

- Η χρήση των κανόνων συμπερασμού εξασφαλίζει την ορθότητα των αποτελεσμάτων.

Κανόνες Συμπερασμού

Κανόνας Συμπερασμού			Ονομασία
(1)	$P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_N$	$\vdash P_1$	**απαλοιφή σύζευξης (and elimination)**
(2)	$P_1, P_2, \ldots P_N$	$\vdash P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots \wedge P_N$	**εισαγωγή συζεύξεων (and introduction)**
(3)	P_1	$\vdash P_1 \vee P_2 \vee \ldots \vee P_N$	**εισαγωγή διαζεύξεων (or introduction)**
(4)	$\neg\neg P$	$\vdash P$	**απαλοιφή διπλής άρνησης (double negation elimination)**
(5)	$P, P \rightarrow Q$	$\vdash Q$	**τρόπος του θέτειν (modus ponens)**
(6)	$P \vee Q, \neg Q \vee R$	$\vdash P \vee R$	**αρχή της ανάλυσης (resolution)**

Κανόνες Συμπερασμού

- Οι κανόνες συμπερασμού συνήθως γράφονται σαν "κλάσματα".
  - Π.χ. ο κανόνας της απαλοιφής σύζευξης:

$$\frac{P_1 \wedge P_2 \wedge \ldots P_N}{P_1}$$

- Οι κανόνες εφαρμόζονται στο αρχικό σύνολο προτάσεων μέχρι να παραχθεί η προς απόδειξη πρόταση.
- Ο "*τρόπος του θέτειν*" (*modus ponens*).
  - Εάν είναι γνωστή η αλήθεια των προτάσεων P και $P \rightarrow Q$ μπορούμε να συνάγουμε ότι η πρόταση Q είναι αληθής.

$$\frac{P, P \rightarrow Q}{Q}$$

- Από το αρχικό σύνολο προτάσεων:

```
P:   "O Νίκος είναι προγραμματιστής"
P→Q:  Εάν "O Νίκος είναι προγραμματιστής",
      τότε "O Νίκος έχει υπολογιστή"
```

  - χρησιμοποιώντας τον modus ponens μπορούμε να συμπεράνουμε ότι:

```
Q:    "O Νίκος έχει υπολογιστή"
```

Διαδικασία Απόδειξης

- Μια διαδικασία απόδειξης (*proof procedure*) αποτελείται
  - από ένα σύνολο κανόνων συμπερασμού Δ και
  - ένα αλγόριθμο εφαρμογής τους.
- Δύο σημαντικές έννοιες.
  - Ορθότητα της παραγόμενης γνώσης
  - Ικανότητα της διαδικασίας να εξαγάγει όλα τα δυνατά συμπεράσματα.

Μια αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται *ορθή* (*sound*) όταν όλα τα συμπεράσματα που εξάγονται αποτελούν και λογικές συνεπαγωγές του αρχικού συνόλου των τύπων

- Για κάθε P όπου $S \vdash_{\Delta} P$ ισχύει και $S \models P$.

Μια αποδεικτική διαδικασία ονομάζεται *πλήρης* (*complete*) όταν για κάθε τύπο P ο οποίος λογικά συνεπάγεται από ένα σύνολο τύπων *S*, μπορεί να "κατασκευάσει" μια απόδειξη

- Για κάθε P για το οποίο ισχύει $S \models P$ ισχύει και το $S \vdash_{\Delta} P$.

- Αυτοματοποίηση της εξαγωγής συμπερασμάτων.
  - Διαδικασία απόδειξης που είναι ορθή, πλήρης αλλά και *αποδοτική* (efficient).

Αρχή της Ανάλυσης

- Μια διαδικασία ικανή για την αυτοματοποίηση της εξαγωγής συμπερασμάτων βασίζεται στην *αρχή της ανάλυσης* (*resolution*) (Robinson 1965).

- Η *αρχή της ανάλυσης* είναι ο κανόνας συμπερασμού:

$$\frac{P \vee R, \neg P \vee Q}{R \vee Q}$$

  - P και $\neg P$: *συμπληρωματικά ζεύγη* (*complementary pairs*)
  - $R \vee Q$: *αναλυθέν* (*resolvent*)

- Οι προτάσεις θα πρέπει να είναι εκφρασμένες σαν ένα σύνολο διαζεύξεων.
  - *πρόταση* (*clause*): Κάθε διάζευξη αποτελείται από άτομα ή αρνήσεις ατόμων.
  - Απαιτείται η μετατροπή όλων των προτάσεων στην *συζευκτική μορφή* της λογικής.
  - Επιτυγχάνεται με την χρήση ισοδυναμιών.

Παράδειγμα Ανάλυσης

❖ Έστω οι προτάσεις:

εάν "έχει ομίχλη" τότε "υπάρχει κίνδυνος" και

εάν "υπάρχει κίνδυνος" τότε "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα" και

"έχει ομίχλη"

❖ Σε συμβολική μορφή:

("έχει ομίχλη" → "υπάρχει κίνδυνος") ∧

("υπάρχει κίνδυνος" → "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα") ∧

"έχει ομίχλη"

❖ Απαλείφεται το συνδετικό της συνεπαγωγής:

(¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος") ∧

(¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα") ∧

"έχει ομίχλη"

Παράδειγμα Ανάλυσης

❖ Συνήθως χρησιμοποιούμε ένα σύνολο προτάσεων (clauses) παραλείποντας το συνδετικό της σύζευξης.

(1) {¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος",

(2) ¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα",

(3) "έχει ομίχλη"}

❖ Εφαρμογή της αρχής της ανάλυσης για τις πρώτες δύο προτάσεις (1 και 2).

(1) ¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος"

(2) ¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

---

(4) ¬"έχει ομίχλη" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

❖ Εφαρμογή της αρχής της ανάλυσης στις προτάσεις (3) και (4).

(3) "έχει ομίχλη"

(4) ¬"έχει ομίχλη" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

---

(5) "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

Απόδειξη Βασισμένη στην Αρχή της Ανάλυσης

¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος"

"έχει ομίχλη"

¬"έχει ομίχλη" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

Ορθότητα και Πληρότητα της Αρχής της Ανάλυσης

- Μια διαδικασία απόδειξης που βασίζεται μόνο στον παραπάνω κανόνα συμπερασμού είναι ορθή.

- Ο κανόνας της ανάλυσης σε συνδυασμό με την "*εις άτοπο απαγωγή*" (*refutation ή proof by contradiction*) είναι πλήρης.

- Απόδειξη αλήθειας μιας πρότασης:
  - εισαγωγή της άρνησης της αποδεικτέας πρότασης
  - προσπάθεια να καταλήξουμε σε άτοπο με εφαρμογή της αρχής της ανάλυσης.

- Το άτοπο εκφράζεται με την *κενή πρόταση*.
  - Η κενή πρόταση εξάγεται από ένα ζεύγος της μορφής $Q \wedge \neg Q$ και συμβολίζεται με □

$$\frac{Q\ ,\ \neg Q}{\square}$$

- Ο κανόνας της ανάλυσης δεν μπορεί να εξαγάγει με *απευθείας απόδειξη* όλους τους δυνατούς τύπους που λογικά συνεπάγονται από την αρχική γνώση.

Παράδειγμα Απαγωγής σε Άτοπο

- Αν στο προηγούμενο παράδειγμα απαιτούνταν να αποδειχθεί ότι
  "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"
  - από το αρχικό σύνολο προτάσεων

(1) **{¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος",**

(2) **¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα",**

(3) **"έχει ομίχλη"}**

  - εισάγεται η άρνηση της προς απόδειξη πρότασης
    ¬"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"
  - και εφαρμόζεται ο κανόνας συμπερασμού μέχρι να καταλήξει η διαδικασία σε άτοπο.

Απόδειξη βασισμένη στην "εις άτοπο απαγωγή".

¬"υπάρχει κίνδυνος" ∨ "απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

¬"απαιτείται χαμηλή ταχύτητα"

¬"έχει ομίχλη" ∨ "υπάρχει κίνδυνος"

¬"υπάρχει κίνδυνος"

"έχει ομίχλη"

¬"έχει ομίχλη"

□

Πλεονεκτήματα-Μειονεκτήματα Προτασιακής Λογικής

- Απαιτείται μόνο ένας κανόνας συμπερασμού για την ορθή απόδειξη οποιασδήποτε πρότασης.
- Πλεονεκτήματα της προτασιακής λογικής:
  - Η απλότητα στη σύνταξη
  - Μπορεί να καταλήξει πάντα σε συμπέρασμα (*καταληκτική - decidable*).
- Μειονεκτήματα:
  - Έλλειψη γενικότητας.
  - Η προτασιακή λογική υπονοεί ότι ο κόσμος αποτελείται μόνο από γεγονότα τα οποία είναι αληθή ή ψευδή.
  - Καμία δυνατότητα διαχωρισμού και προσπέλασης των οντοτήτων του κόσμου.

Κατηγορηματική Λογική

- Επέκταση της προτασιακής λογικής.
- Ο κόσμος περιγράφεται σαν ένα σύνολο *αντικειμένων, ιδιοτήτων* και *σχέσεων*.
- Αντιμετωπίζει το πρόβλημα της μη προσπελασιμότητας των στοιχείων των γεγονότων της προτασιακής λογικής.
  - Π.χ., η πρόταση " *ο τζίμης είναι τίγρης* " αναπαριστάται με *τίγρης(τζίμης)*
- Ύπαρξη *μεταβλητών*, που αυξάνει σημαντικά την εκφραστική ικανότητά της,
  - Επιτρέπει την αναπαράσταση "γενικής" γνώσης.
- Επεκτείνει την προτασιακή λογική εισάγοντας
  - όρους (terms),
  - κατηγορήματα (predicates) και
  - ποσοδείκτες (quantifiers).

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (1/3)

- *Σταθερές*, π.χ. a, b, c, a_1, a_2, κ.λ.π.
  - Τα ονόματα των σταθερών ξεκινούν με πεζά γράμματα ή αριθμούς.
- *Μεταβλητές*, π.χ. X, Y, X_1, X_2, Man κ.λ.π.
  - Αναπαριστώνται από κεφαλαία σύμβολα του λατινικού αλφάβητου, ή τουλάχιστον τα ονόματα τους ξεκινούν με κεφαλαίο γράμμα.
- *Συναρτησιακό σύμβολο,* π.χ. f, g, father_of κ.λ.π.
  - *Τάξη* (*arity*): το πλήθος των *ορισμάτων* (*arguments*) ή *παραμέτρων* (*parameters*).
- *Σύμβολα κατηγορημάτων*, π.χ. p, q, color, κ.λ.π.
  - Κάθε σύμβολο κατηγορήματος έχει μια συγκεκριμένη τάξη.
- *Συνδετικά*:
  - Όμοια με εκείνα της προτασιακής λογικής και με την ίδια σημασιολογία.
  - "$\wedge$" σύζευξη (λογικό "ΚΑΙ"), "$\vee$" διάζευξη (λογικό "Η"), "$\neg$" άρνηση, "$\rightarrow$" συνεπαγωγή ("ΕΑΝ ΤΟΤΕ"), "$\leftrightarrow$" ισοδυναμία ("ΑΝ ΚΑΙ ΜΟΝΟ ΑΝ").

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (2/3)

- *Δύο ποσοδείκτες*: τον *υπαρξιακό* ποσοδείκτη "∃" (existential quantifier) και τον *καθολικό* ποσοδείκτη "∀" (universal quantifier).
- *Τρία σύμβολα στίξης*: "(", ")" και ",".
- Δύο σύμβολα αλήθειας **T** (αληθές) και **F** (ψευδές).
- Ένας *όρος* (*term*) της κατηγορηματικής λογικής είναι είτε:
  - μια σταθερά
  - μια μεταβλητή
  - ένας *συναρτησιακός όρος* (*functional term*) της μορφής $F(t_1,t_2,...,t_n)$, όπου F είναι ένα συναρτησιακό σύμβολο τάξης n και τα ορίσματα $t_1, t_2,...,t_n$ είναι επίσης όροι.

    `X, νίκος, πατέραςΤου(νίκου), πατέραςΤου(πατέραςΤου(νίκου))`
- Ένας ατομικός τύπος (atomic formula) έχει την μορφή

  $$\mathbf{p(a_1,a_2,...,a_n)}$$

  - *p* είναι ένα σύμβολο κατηγορήματος (ή κατηγόρημα) τάξης *n* και τα $a_1,a_2,...,a_n$ *ορίσματα* (*arguments*).
  - Κάθε όρισμα είναι ένας *όρος*.

Αλφάβητο Κατηγορηματικής Λογικής (3/3)

- Η σύνδεση προτάσεων για τη δημιουργία *ορθά δομημένων τύπων* γίνεται με τη χρήση συνδετικών.
- Στην κατηγορηματική λογική οι ορθά δομημένοι τύποι περιέχουν και ποσοδείκτες.
- Παράδειγμα ορθά δομημένου τύπου:

$$\forall X \ \text{φάλαινα}(X) \rightarrow \text{θηλαστικό}(X)$$

- Για την επεξήγηση του τύπου και την απόδοση λογικής τιμής απαιτείται ορισμός της σημασιολογίας.

Σημασιολογία Κατηγορηματικής Λογικής

- Αφηρημένος κόσμος (abstract world) ή πεδίου (domain)
  - Αποτελείται από αντικείμενα και σχέσεις πάνω σε αυτά
  - Ιδιότητα: σχέση που αφορά μόνο ένα αντικείμενο.
- Μια *ερμηνεία* αντιστοιχεί τους όρους και ατομικούς τύπους της λογικής στα αντικείμενα και σχέσεις του κόσμου.
- Η απεικόνιση όρων σε αντικείμενα ονομάζεται *ανάθεση όρων* (*term assignment*).
  - Οι σταθερές αντιστοιχούνται στα αντικείμενα του κόσμου
  - Οι συναρτησιακοί όροι αναφέρονται σε αντικείμενα, στα οποία δεν δίνουμε ένα συγκεκριμένο όνομα αλλά χρησιμοποιούμε μια περίφραση για να αναφερθούμε σ' αυτά.
- Ένας ατομικός τύπος απεικονίζει μια σχέση ανάμεσα σε μια διατεταγμένη πλειάδα (tuple) αντικειμένων
  - Μπορεί να είναι αληθής ή ψευδής.

Μεταβλητές και Ποσοδείκτες

Στην *κατηγορηματική λογική πρώτης τάξης* (*first order predicate logic*) οι μεταβλητές αναφέρονται μόνο σε αντικείμενα και όχι σε συναρτησιακά σύμβολα ή κατηγορήματα.

- Επιβάλλεται η ποσοτικοποίηση των μεταβλητών από έναν από τους ποσοδείκτες.

```
άνθρωπος(X)  → θνητός(X)
άνθρωπος(X)  ∧ μαθηματικός(X)
```

- Τι ακριβώς αναπαριστούν οι παραπάνω τύποι;
- Η αποσαφήνιση της σημασίας των παραπάνω εκφράσεων απαιτεί την εισαγωγή κατάλληλων ποσοδεικτών.
- Ο *υπαρξιακός ποσοδείκτης* "∃" (*existential quantifier*).
  - **(∃X)(φ(X))** προφέρεται "υπάρχει **X**, τέτοιο ώστε ο τύπος **φ(X)** να αληθής"
- Ο *καθολικός ποσοδείκτης* "∀" (*universal quantifier*).
  - **(∀X)(φ(X))** προφέρεται "για κάθε **X**, ο **φ(X)** είναι αληθής"
- Έτσι μια σωστότερη αναπαράσταση της παραπάνω γνώσης είναι:

```
(∀X) (άνθρωπος(X)  → θνητός(X))
              "όλοι οι άνθρωποι είναι θνητοί"
(∃X) (άνθρωπος(X)  ∧ μαθηματικός(X))
              "κάποιος άνθρωπος είναι μαθηματικός"
```

Εμβέλεια Ποσοδεικτών

- Σε έναν τύπο **(∃X)(φ(X))** ή **(∀X)(φ(X))**, το **φ(X)** ονομάζεται *εμβέλεια* (*scope*) των **∃X** και **∀X** αντίστοιχα.
  - Η εμβέλεια του **∀X** στον τύπο **(∀X)(άνθρωπος(X)→θνητός(X))** είναι ο τύπος **άνθρωπος(X)→θνητός(X).**
- Μια *εμφάνιση* (*occurrence*) κάποιας μεταβλητής, μπορεί να είναι:
  - *δεσμευμένη* (*bound*).
  - εν *ελεύθερη* (*free*).
  - Πχ, στον τύπο **(∀X)(φ(X,Y))**
    - η εμφάνιση της μεταβλητής **X** είναι *δεσμευμένη*
    - η εμφάνιση της μεταβλητής **Y** είναι *ελεύθερη*.
- Ένας τύπος που στερείται ελεύθερων μεταβλητών ονομάζεται *κλειστός τύπος* (*closed formula*).
- *Βασικός όρος* (ή *τύπος*) (ground term), είναι ένας όρος (ή τύπος) που δεν περιέχει καμία μεταβλητή.
  - Βασικοί όροι: *επάγγελμα(προγραμματιστής)* και *φορολογούμενος(νίκος, επάγγελμα(προγραμματιστής))*

Σειρά Ποσοδεικτών

- Η ύπαρξη πολλών ποσοτικοποιημένων μεταβλητών απαιτεί περισσότερη προσοχή.
  - Η σειρά των μεταβλητών παίζει σημαντικό ρόλο.

- Για παράδειγμα.\

  (∀X)((∃Y)(δεσμός(X,Y)))

  (∃Y)((∀X)(δεσμός(X,Y)))

-

- Ο πρώτος σημαίνει "*για κάθε κόμβο X του γράφου, δηλαδή για ένα αντικείμενο του πεδίου, υπάρχει ένας κόμβος Y έτσι ώστε να ισχύει η σχέση δεσμός(X,Y)*".

- Ο δεύτερος σημαίνει ότι "*υπάρχει τουλάχιστον ένας κόμβος Y τέτοιος ώστε για κάθε κόμβο X του γράφου να ισχύει η σχέση δεσμός(X,Y)*".

Αντικατάσταση και Ενοποίηση

- Η *αντικατάσταση* (*substitution*) αφορά την αντικατάσταση των μεταβλητών από κάποιους όρους.
- Παριστάνεται με **{$\mathbf{X_i/t_i}$}** όπου **$\mathbf{X_i}$** η μεταβλητή και **$\mathbf{t_i}$** ο όρος.
  - Π.χ. η αντικατάσταση **{X/φάλαινα}** στον τύπο:

```
είναι(X, θηλαστικό)
```

  - θα δώσει τον τύπο:

```
είναι(φάλαινα, θηλαστικό)
```

***Ενοποίηση* (*unification*) είναι η διαδικασία κατά την οποία δύο εκφράσεις γίνονται συντακτικά όμοιες με την χρήση αντικαταστάσεων.**

  - Π.χ. οι ακόλουθες προτάσεις:

```
είναι(λιοντάρι, θηλαστικό, X)  είναι(λιοντάρι, Y, σαρκοβόρο)
```

  - ενοποιούνται με την αντικατάσταση **θ={X/σαρκοβόρο, Y/θηλαστικό}**.

Ενοποιητής

- Για δύο εκφράσεις $\boldsymbol{\varphi_1}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}$, ο *ενοποιητής* (*unifier*) τους, είναι μια αντικατάσταση $\boldsymbol{\theta}$ τέτοια ώστε η έκφραση $\boldsymbol{\varphi_1\theta}$ να είναι συντακτικά όμοια με την $\boldsymbol{\varphi_2\theta}$.
- Οι εκφράσεις $\boldsymbol{\varphi_1}$ και $\boldsymbol{\varphi_2}$ ονομάζονται *ενοποιήσιμες* (*unifiable*).
- Ο *γενικότερος ενοποιητής* (*mgu-most general unifier*) ενοποιεί τις εκφράσεις με τις λιγότερες δυνατές αντικαταστάσεις.
- Εύρεση του *γενικότερου ενοποιητή*:
  - **Δύο σταθερές ενοποιούνται αν και μόνο αν είναι ίδιες.**
  - **Μια μεταβλητή ενοποιείται με οποιοδήποτε όρο, εισάγοντας μια νέα αντικατάσταση στον γενικότερο ταυτοποιητή.**
  - **Δύο συναρτησιακοί όροι ενοποιούνται αν έχουν το ίδιο συναρτησιακό σύμβολο, την ίδια τάξη (αριθμό ορισμάτων) και αν κάθε όρισμα του πρώτου μπορεί να ενοποιηθεί με το αντίστοιχο σε θέση όρισμα του δεύτερου όρου.**
  - **Δυο ατομικοί τύποι ενοποιούνται αν έχουν το ίδιο κατηγόρημα, την ίδια τάξη (αριθμό ορισμάτων) και αν κάθε όρισμα του πρώτου μπορεί να ενοποιηθεί με το αντίστοιχο σε θέση όρισμα του δεύτερου ατομικού τύπου.**

Χαρακτηριστικά Αλγορίθμου Ενοποίησης

- Ο αλγόριθμος ενοποίησης είναι αποδοτικός.
- Είναι **μη ορθός**.
  - Η μη ορθότητα του αλγορίθμου έγκειται στις περιπτώσεις όπου η προς ενοποίηση μεταβλητή εμφανίζεται στον όρο με τον οποίο θα ενοποιηθεί.
  - Π.χ. η ενοποίηση Χ=επάγγελμα(Χ) δίνει Χ=επάγγελμα(επάγγελμα(επάγγελμα(...)))
- *Έλεγχος εμφάνισης* (*occurs check*).
- Οι έννοιες της αντικατάστασης και της ενοποίησης είναι σημαντικές για την εφαρμογή των κανόνων συμπερασμού της κατηγορηματικής.

Αυστηρότερος Μαθηματικά Ορισμός της Ερμηνείας

- Έστω ένα πεδίο *D* που είναι ένα μη κενό σύνολο στοιχείων. Μια ερμηνεία *I* πάνω στο *D* είναι μια απεικόνιση στην οποία:
  - Κάθε σταθερά αντιστοιχείται σε ένα στοιχείο του *D*.
  - Κάθε μεταβλητή έχει σαν πεδίο τιμών το *D*.
  - Κάθε συναρτησιακό σύμβολο *f* τάξης *n* ορίζεται σα μια απεικόνιση από το χώρο D^n στο *D*.
  - Κάθε κατηγόρημα τάξης *n* ορίζεται σα μια απεικόνιση από το χώρο D^n στα σύμβολα αλήθειας $\{t,f\}$. Ουσιαστικά η ερμηνεία ορίζει ένα υποσύνολο του D^n για το οποίο το κατηγόρημα είναι αληθές.
- Δοθέντος ενός καλά *σχηματισμένου κλειστού τύπου* και μιας ερμηνείας είναι δυνατό να προσδιοριστεί η λογική τιμή του τύπου.
- Η λογική τιμή ενός *μη-κλειστού τύπου* απαιτεί εκτός από την ερμηνεία και κατάλληλες αντικαταστάσεις τιμών στις ελεύθερες μεταβλητές του.
- Οι ορισμοί της προτασιακής λογικής που αφορούν τις ερμηνείες γενικεύονται εύκολα για την κατηγορηματική λογική.
  - Μια ερμηνεία *ικανοποιεί* ένα κλειστό τύπο αν ο τύπος είναι αληθής κάτω από αυτή την ερμηνεία (*μοντέλο*)
  - Με παρόμοιο τρόπο γενικεύονται οι ορισμοί της *ταυτολογίας*, της *αντίφασης*, της *λογικής συνεπαγωγής* και της *ισοδυναμίας*, που δόθηκαν στην προτασιασκή λογική.

Παράδειγμα Αναπαράστασης Γνώσης

- Γνώση για τα χαρακτηριστικά διαφόρων ειδών ζώων:
  - Κάθε ζώο το οποίο έχει τρίχωμα ή παράγει γάλα είναι θηλαστικό.
  - Κάθε ζώο που έχει φτερά και γεννάει αυγά είναι πουλί.
  - Κάθε θηλαστικό που τρέφεται με κρέας ή έχει κοφτερά δόντια είναι σαρκοβόρο.
  - Κάθε σαρκοβόρο με χρώμα καφέ-πορτοκαλί που έχει μαύρες ρίγες είναι τίγρης.
  - Κάθε σαρκοβόρο με χρώμα καφέ-πορτοκαλί που έχει μαύρες βούλες είναι τσιτάχ.
  - Κάθε πουλί το οποίο δεν πετά και κολυμπά είναι πιγκουΐνος.
- Οι προτάσεις αναπαριστώνται σε κατηγορηματική λογική ως:

```
∀X (έχει(X,τρίχωμα) ∨ παράγει(X, γάλα)) → είναι(X, θηλαστικό)
∀X (έχει(X, φτερά) ∧ γεννάει(X, αυγά)) → είναι(X, πουλί)
∀X (είδος(X,θηλαστικό) ∧ ((τρέφεται(X, κρέας) ∨ έχει(X, δόντια(κοφτερά))) )
      → είναι(X, σαρκοβόρο)
∀X (είναι(X,σαρκοβόρο) ∧ χρώμα(X,καφέ-πορτοκαλί) ∧ έχει(X,ρίγες(μαύρες)) → είναι(X, τίγρης)
∀X (είναι(X,σαρκοβόρο) ∧ χρώμα(X,καφέ-πορτοκαλί) ∧έχει(X,βούλες(μαύρες))  → είναι(X,τσιτάχ).
∀X (είναι(X,πουλί) ∧ (¬πετά(X) ) ∧ κολυμπά(X) ) → είναι(X, πιγκουΐνος).
```

- Πως εξάγεται νέα γνώση (νέες προτάσεις);

Ισοδυναμίες

- Υπάρχει σύνολο ισοδυναμιών για το μετασχηματισμό των τύπων της λογικής.
- Δύο "κατηγορίες" ισοδυναμιών":
  - Κοινές με την προτασιακή λογική
  - Εκείνες που αφορούν ποσοσδείκτες

Από την Προτασιακή Λογική

Ισοδυναμία		Ονομασία
(1)	$p \Leftrightarrow \neg\neg p$	**νόμος της διπλής άρνησης**
(2)	$(\neg p \vee \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)$	**νόμος De Morgan**
(3)	$(\neg p \wedge \neg q) \Leftrightarrow \neg(p \vee q)$	**νόμος De Morgan**
(4)	$(p \vee q) \wedge r \Leftrightarrow (p \wedge r) \vee (q \wedge r)$	**επιμερισμός ως προς την σύζευξη**
(5)	$(p \wedge q) \vee r \Leftrightarrow (p \vee r) \wedge (q \vee r)$	**επιμερισμός ως προς την διάζευξη**
(6)	$(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q$	
(7)	$(p \leftrightarrow q) \Leftrightarrow (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$	

Ισοδυναμίες
Για Ποσοδείκτες

(8)	$\forall X(p(X)) \Leftrightarrow \neg\exists X(\neg p(X))$	
(9)	$\exists X(p(X)) \Leftrightarrow \neg\forall X(\neg p(X))$	
(10)	$\forall X(p(X)) \vee q \Leftrightarrow \forall X(p(X) \vee q)$	όπου το q δεν περιέχει ελεύθερες εμφανίσεις της μεταβλητής X.
(11)	$\forall X(p(X)) \wedge q \Leftrightarrow \forall X(p(X) \wedge q)$	
(12)	$\exists X(p(X)) \vee q \Leftrightarrow \exists X(p(X) \vee q)$	
(13)	$\exists X(p(X)) \wedge q \Leftrightarrow \exists X(p(X) \wedge q)$	
(14)	$\forall X(p(X)) \Leftrightarrow \forall Y(p(Y))$	μετονομασία μεταβλητών
(15)	$\exists X(p(X)) \Leftrightarrow \exists Y(p(Y))$	
(16)	$\forall X(p(X)) \wedge \forall X(q(X)) \Leftrightarrow \forall X(p(X) \wedge q(X))$	
(17)	$\exists X(p(X)) \vee \exists X(q(X)) \Leftrightarrow \exists X(p(X) \vee q(X))$	

Παρατηρήσεις πάνω στις ισοδυναμίες

- Η μετονομασία δεσμευμένων μεταβλητών σε ένα τύπο και στην εμβέλεια του αντίστοιχου ποσοδείκτη, διατηρεί την ισοδυναμία (ισοδυναμίες (14) και (15)).

∀X (έχει(X,τρίχωμα) ∨ παράγει(X, γάλα)) → είναι(X, θηλαστικό).

∀Z (έχει(Z,τρίχωμα) ∨ παράγει(Z, γάλα)) → είναι(Z, θηλαστικό).

- Η σύζευξη καθολικά ποσοτικοποιημένων τύπων είναι ισοδύναμη με την καθολικά ποσοτικοποιημένη σύζευξή τους.
  - $\forall X(p(X)) \wedge \forall X(q(X)) \Leftrightarrow \forall X(p(X) \wedge q(X))$
- Η διάζευξη υπαρξιακά ποσοτικοποιημένων τύπων είναι ισοδύναμη με την υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη διάζευξή τους.
  - $\exists X(p(X)) \vee \exists X(q(X)) \Leftrightarrow \exists X(p(X) \vee q(X))$
- *ΔΕΝ ισχύουν οι ισοδυναμίες*
  - $\forall X\ (p(X)) \vee \forall X\ (q(X)) \Leftrightarrow \forall X\ (p(X) \vee q(X))$
  - $\exists X\ (p(X)) \wedge \exists X\ (q(X)) \Leftrightarrow \exists X\ (p(X) \wedge q(X))$

Απόδειξη

$$\forall X(p(X)) \wedge \forall X(q(X)) \Leftrightarrow \forall X(p(X) \wedge q(X))$$

- Έστω $X_1, X_2, ..., X_n$ είναι τα αντικείμενα ενός (πεπερασμένου) πεδίου D.
- Ο τύπος $(\forall X)\ (p(X))$ ισοδυναμεί με τη σύζευξη
  $p(X_1) \wedge p(X_2) \wedge p(X_3) \wedge ... \wedge p(X_n)$.
- Άρα, ο τύπος $\forall X\ (p(X)) \wedge \forall X\ (q(X))$, ισοδυναμεί με το τύπο:
  $(p(X1) \wedge p(X2) \wedge p(X3) \wedge ... \wedge p(Xn)) \wedge (q(X1) \wedge q(X2) \wedge q(X3) \wedge ... \wedge q(Xn))$
- που είναι ισοδύναμος με τον τύπο:
  $(p(X1) \wedge q(X1)) \wedge (p(X2) \wedge q(X2)) \wedge (p(X3) \wedge q(X3)) \wedge ... \wedge (p(Xn) \wedge q(Xn))$
- και τελικά ισοδύναμος με:
  $\forall X\ (p(X) \wedge q(X))$

- Με παρόμοιο τρόπο αποδεικνύονται οι υπόλοιπες ισοδυναμίες

Προσημασμένη Συζευκτική Κανονική Μορφή

- Ύπαρξη τύπων που αν και φαινομενικά διαφορετικοί, είναι λογικά ισοδύναμοι.

  ¬((∃X)(p(X) → q(X)))

  (∀X)(p(X) ∧ ¬q(X))

- Αναγωγή σε μια κανονική μορφή.
- *Προσημασμένη συζευκτική κανονική μορφή* (*prenex conjunctive normal form*):

  ∀X∃Y (p(X) ∧ ¬q(X) ∧ (p(X) ∨ ¬p(X) ∨ q(X, Y)) ∧...∧ (r(X,Y) ∨ s(X)))

- Τα βασικά δομικά στοιχεία:
  - τα λεκτικά στοιχεία (literals) (ατομικός τύπος ή η άρνηση ενός ατομικού τύπου)
  - οι *προτάσεις* (*clauses*) (πεπερασμένη διάζευξη (disjunction) κανενός ή περισσοτέρων λεκτικών στοιχείων).
  - Π.χ. η έκφραση **p(X)** ∨ ¬**p(X)** ∨ **q(X, Y)** είναι μια πρόταση.
- Η Κενή *πρόταση* (*empty clause*) αναπαρίσταται με το σύμβολο □.
- Ένας τύπος (formula) αποτελείται από μια σύζευξη προτάσεων προσημασμένης από υπαρξιακούς και καθολικούς ποσοδείκτες.

  ∀X (¬έχει(X,τρίχωμα) ∨ ¬παράγει(X, γάλα) ∨ είναι(X, θηλαστικό).

  ∀X ((¬έχει(X, φτερά) ∨ είναι(X, πουλί))

  ∧ (¬γεννάει(X, αυγά)) ∨ είναι(X, πουλί)))

Διαδικασία Αναγωγής σε Κανονική Μορφή

- Οποιοσδήποτε τύπος της κατηγορηματικής λογικής μπορεί να αναχθεί σε ένα ισοδύναμο τύπο της προσημασμένης συζευκτικής κανονικής μορφής της λογικής.

- Η διαδικασία περιλαμβάνει τα ακόλουθα βήματα:

  - **Απαλοιφή των συνδετικών της ισοδυναμίας και συνεπαγωγής (ισοδυναμίες (6), (7))**
  - **Μετονομασία των μεταβλητών έτσι ώστε δύο μεταβλητές που ποσοτικοποιούνται από διαφορετικούς ποσοδείκτες να μην έχουν το ίδιο όνομα. (ισοδυναμίες (14), (15))**
  - **Μετατροπή των τύπων έτσι ώστε το συνδετικό της άρνησης να εφαρμόζεται μόνο σε ατομικούς τύπους (ισοδυναμίες (1), (2), (3), (8) και (9))**
  - **Μεταφορά των ποσοδεικτών με αναδρομική εφαρμογή των ισοδυναμιών (10)-(13)**
  - **Εφαρμογή των ισοδυναμιών επιμερισμού ως προς την σύζευξη και διάζευξη έτσι ώστε ο τελικός τύπος να αποτελείται από συζεύξεις προτάσεων (ισοδυναμίες (4), (5)).**

Παράδειγμα Αναγωγής σε Κανονική Μορφή

$\forall$X (βλάβη(X) $\rightarrow$ $\exists$Y(σύμπτωμα(X,Y))) $\wedge$ $\neg$($\exists$Y(βλαβη(Y) $\wedge$ μηχάνημα(λειτουργεί))

- Απαλοιφή του συνδετικού της ισοδυναμίας (ισοδυναμία (6)):

  $\forall$X ($\neg$βλάβη(X) $\vee$ $\exists$Y(σύμπτωμα(X,Y))) $\wedge$ $\neg$($\exists$Y(βλαβη(Y) $\wedge$ μηχάνημα(λειτουργεί))

- Επειδή η μεταβλητή Y εμφανίζεται ποσοτικοποιημένη από δύο διαφορετικούς ποσοδείκτες, η δεύτερη της εμφάνιση μετονομάζεται σε Z

  $\forall$X ($\neg$βλάβη(X) $\vee$ $\exists$Y(σύμπτωμα(X,Y))) $\wedge$ $\neg$($\exists$Z(βλάβη(Z) $\wedge$ μηχάνημα(λειτουργεί))

- Εφαρμογή των ισοδυναμιών DeMorgan και (9) (άρνηση μόνο σε τύπους):

  $\forall$X ($\neg$βλάβη(X) $\vee$ $\exists$Y(σύμπτωμα(X,Y))) $\wedge$ $\forall$Z($\neg$βλάβη(Z) $\vee$ $\neg$μηχάνημα(λειτουργεί))

- Εφαρμογή των ισοδυναμίων (10) και (12) (ομαδοποίηση των λεκτικών):

  $\forall$X $\exists$Y $\forall$Z (($\neg$βλάβη(X) $\vee$ σύμπτωμα(X,Y)) $\wedge$ ($\neg$βλάβη(Z) $\vee$ $\neg$μηχάνημα(λειτουργεί)))

Κανονική Μορφή κατά Skolem

- Είναι δυνατό να υπάρξει κάποια κανονική μορφή στην οποία να εξαλείφονται πλήρως οι ποσοδείκτες;
- *Κανονική μορφή κατά Skolem*,
  - οι υπαρξιακά ποσοτικοποιημένες εμφανίσεις μεταβλητών αντικαθίστανται από σταθερές ή συναρτήσεις καθολικά ποσοτικοποιημένων μεταβλητών.

1) **Έστω $\exists X_i$ η πρώτη από αριστερά υπαρξιακά ποσοτικοποιημένη μεταβλητή στον τύπο και $\forall X_1 \ldots \forall X_{i-1}$ οι καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές του τύπου, μέσα στην εμβέλεια των οποίων βρίσκεται το $\exists X_i$, δηλαδή που βρίσκονται στα "αριστερά του $\exists X_i$, τότε**
   a) **Αν το πλήθος των καθολικών μεταβλητών ($X_1 \ldots X_{i-1}$) είναι μηδέν, δηλαδή δεν υπάρχουν καθολικά ποσοτικοποιημένες μεταβλητές στα αριστερά της X_i, τότε κάθε εμφάνιση της X_i στο τύπο αντικαθίσταται από μια νέα σταθερά Skolem sk_{Xi}(Skolem constant).**
   b) **Αν το πλήθος των καθολικών μεταβλητών είναι μεγαλύτερο του μηδενός, τότε κάθε εμφάνιση της μεταβλητής Xi στον τύπο αντικαθίσταται από μια νέα συνάρτηση Skolem (Skolem function) στις μεταβλητές X1... Xi-1, sk_funcXi(X1,...,Xi-1).**
   c) **Διάγραψε τον υπαρξιακό ποσοδείκτη ∃Xi από τον τύπο.**
2) **Αν υπάρχουν άλλοι υπαρξιακοί ποσοδείκτες στον τύπο, τότε πήγαινε στο βήμα 1.**
3) **Διάγραψε όλους τους καθολικούς ποσοδείκτες.**

Παράδειγμα Κανονικής Μορφής κατά Skolem

$\forall X\ \exists Y\ \forall Z\ ((\neg$βλάβη$(X) \lor$ σύμπτωμα$(X,Y)) \land (\neg$βλάβη$(Z) \lor \neg$μηχάνημα(λειτουργεί)$))$

- Υπάρχει μόνο ένας υπαρξιακός ποσοδείκτης ($\exists$**Y**) μέσα στην εμβέλεια του καθολικού ποσοδείκτη $\forall$**X**.
- Ο ποσοδείκτης αντικαθίσταται από την συνάρτηση Skolem **sk_function$_Y$(X)**:

$\forall X\ \forall Z(\ (\neg$βλάβη$(X) \lor$ σύμπτωμα$(X,$ sk_func$_Y(X))\ )$

$\land\ (\neg$βλάβη$(Z) \lor \neg$μηχάνημα(λειτουργεί)$))$

- Διαγράφονται όλοι οι καθολικοί ποσοδείκτες από τον παραπάνω τύπο:

$(\ \neg$βλάβη$(X) \lor$ σύμπτωμα$(X,$ sk_func$_Y(X))\ )$

$\land(\ \neg$βλάβη$(Z) \lor \neg$μηχάνημα(λειτουργεί)$)$

- Η συνάρτηση Skolem δεν εξαρτάται από την μεταβλητή **Z** αλλά μόνο από την **X**.

- Ο νέος τύπος που προκύπτει είναι *ασθενώς ισοδύναμος* (*weakly equivalent*) με τον αρχικό τύπο.
  - Διατηρείται τη μη-ικανοποιησιμότητα (unsatisfiability).
  - ΠΛηρότητα αποδεικτικών διαδικασιών βασισμένων στην *εις άτοπο απαγωγή*.

Προτασιακή Μορφή της Κατηγορηματικής Λογικής

- Μετατροπή ενός τύπου κανονικής μορφής σε ένα σύνολο προτάσεων- προτασιακή μορφή της λογικής (clausal form).
- Ο μετασχηματισμός βασίζεται στον κανόνα της απαλοιφής σύζευξης: $\frac{p \wedge q}{p}$, $\frac{p \wedge q}{q}$
  - Ένας τύπος της μορφής **p ∧ q ∧ r ∧ s** μετατρέπεται στο σύνολο των τύπων **{p,q,r,s}**
- Το σύνολο των τύπων που προκύπτει αποτελείται από προτάσεις.
- Για παράδειγμα ο τύπος

  (¬βλάβη(X) ∨ σύμπτωμα(X, sk_func$_Y$(X))) ∧

  (¬βλάβη(Z) ∨ ¬μηχάνημα(λειτουργεί))

  - μετατρέπεται στις προτάσεις:

¬βλάβη(X) ∨ σύμπτωμα(X, sk_func$_Y$(X))

¬βλάβη(Z) ∨ ¬μηχάνημα(λειτουργεί)

Μορφή Kowalski

- Όλες οι προτάσεις εκφράζονται σαν λογικές ισοδυναμίες της μορφής

  $\mathbf{q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m}$

  - Οι ατομικοί τύποι $\mathbf{r_i}$ είναι σε διάζευξη, ενώ οι $\mathbf{q_j}$ σε σύζευξη.
  - Τα $\mathbf{r_i}$ αποτελούν τα *συμπεράσματα* της πρότασης, ενώ τα $\mathbf{q_j}$ τις *υποθέσεις* της.
  - Τόσο τα συμπεράσματα όσο και οι υποθέσεις δεν περιέχουν αρνήσεις ατομικών τύπων.
- Η διαδικασία μετατροπής μιας πρότασης σε μορφή Kowalski είναι εξαιρετικά απλή.
  - Για παράδειγμα έστω η πρόταση

    $\mathbf{p \vee \neg q \vee r \vee \neg s \vee t}$
  - Το πρώτο βήμα αφορά την συγκέντρωση όλων των ατομικών τύπων σε άρνηση στο αριστερό μέρος της πρότασης, με εφαρμογή της ισοδυναμίας $\mathbf{p \vee q \Leftrightarrow q \vee p}$:

    $\mathbf{\neg q \vee \neg s \vee p \vee r \vee t}$
  - Εφαρμογή του νόμου DeMorgan $\mathbf{\neg p \vee \neg q \Leftrightarrow \neg(p \wedge q)}$

    $\mathbf{\neg(q \wedge s) \vee p \vee r \vee t}$
  - Εφαρμογή της ισοδυναμίας $\mathbf{(p \rightarrow q) \Leftrightarrow \neg p \vee q}$

    $\mathbf{q \wedge s \rightarrow p \vee r \vee t}$
  - Αντικατάσταση των συμβόλων της σύζευξης και της διάζευξης με το σύμβολο ",".

    $\mathbf{q, s \rightarrow p, r, t}$

Παράδειγμα Μορφής Kowalski

- Για παράδειγμα οι προτάσεις:

  ¬βλάβη(X)∨ σύμπτωμα(X, θόρυβος) ∨ ένταση(θόρυβος,μεγάλη)

  ¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) ∨ αντικατάσταση(Z)

- στην μορφή Kowlaski

  βλάβη(X)→σύμπτωμα(X, θόρυβος),ένταση(θόρυβος,μεγάλη)

  βλάβη(W),εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί)→αντικατάσταση(Z)

- Περισσότερο αναγνώσιμη μορφή.

Περιπτώσεις Προτασεων Kowalski

$q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m$

- Αν m > 0 και n > 0, τότε η πρόταση ερμηνεύεται σαν

  ισχύει r_1 **ή** r_2**…ή** r_m **εάν** q_1 **και** q_2 **…και** q_n

  - *προτάσεις Horn* (*Horn clauses*).
  - Επιτρέπεται μόνο ένας ατομικός τύπος στο συμπέρασμα, είναι δηλαδή της μορφής:

  $q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow r$ *Κανόνας*

- Αν m=0, τότε οι υποθέσεις καταλήγουν σε αναληθή συμπέρασμα:

  $q_1, q_2, \ldots, q_n \rightarrow$ *Στόχος, Ερώτηση*

- Αν n=0, τότε αναπαριστάται μια πρόταση χωρίς υπόθεση.

  $\rightarrow r_1, r_2, \ldots, r_m$ *Γεγονότα*

- Αν m=0 και n=0, τότε αναπαριστάται μια πρόταση πάντα αναληθή και συμβολίζεται με την κενή πρόταση □.

Μηχανισμός Εξαγωγής Συμπερασμάτων

- Ο βασικός μηχανισμός εξαγωγής συμπερασμάτων στην κατηγορηματική λογική είναι η *απόδειξη*.
- Υπάρχει ένα πλήθος κανόνων συμπερασμού.
  - Αυτοί που ισχύουν στην προτασιακή λογική,
  - Επιπλέον υπάρχουν δύο κανόνες που αφορούν προτάσεις που περιέχουν ποσοτικοποιημένες μεταβλητές.
  - Όλοι οι κανόνες βασίζονται στην έννοια της αντικατάστασης μεταβλητών.
- Για παράδειγμα έστω ότι η βάση γνώσης περιέχει τις προτάσεις

(∀X) (άνθρωπος(X) → θνητός(X)) (1)

άνθρωπος(νίκος) (2)

  - Σύμφωνα με τον κανόνα συμπερασμού (7) και την αντικατάσταση **θ={X/νίκος}** είναι δυνατό να εξαχθεί το συμπέρασμα:

άνθρωπος(νίκος) → θνητός(νίκος) (3)

  - Με εφαρμογή του κανόνα *"τρόπος του θέτειν"* (*modus ponens*) στις προτάσεις (2) και (3), εξάγεται η πρόταση

θνητός(νίκος) (4)

Κανόνες Συμπερασμού της Κατηγορηματικής Λογικής

Κανόνας Συμπερασμού			Ονομασία
(1)	$p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$	$\vdash p_i$	**απαλοιφή σύζευξης (and elimination)**
(2)	$p_1, p_2, \ldots p_n$	$\vdash p_1 \wedge p_2 \wedge \ldots \wedge p_n$	**εισαγωγή συζεύξεων (and introduction)**
(3)	p_i	$\vdash p_1 \vee p_2 \vee \ldots \vee p_n$	**εισαγωγή διαζεύξεων (or introduction)**
(4)	$\neg\neg p$	$\vdash p$	**απαλοιφή διπλής άρνησης (double negation elimination)**
(5)	$p, p \rightarrow q$	$\vdash q$	**τρόπος του θέτειν (modus ponens)**
(6)	$p \vee q, \neg q \vee r$	$\vdash p \vee r$	**αρχή της ανάλυσης (resolution)**
(7)	$\forall X p(X)$	$\vdash p(a)\ \theta=\{X/a\}$	**απαλοιφή καθολικού ποσοδείκτη (universal elimination)**
(8)	$p(a)$	$\vdash \exists X p(X)\ \theta=\{X/a\}$	**εισαγωγή υπαρξιακού ποσοδείκτη (existential introduction)**

Γενικευμένος Τρόπος του Θέτειν

- "*Γενικευμένος τρόπος του θέτειν*" - ΓΤΘ (*generalized modus ponens*):

$$\frac{p'_1, p'_2 \ldots, p'_n, p_1 \wedge p_2 \ldots \wedge p_n \rightarrow q}{\theta\, q}$$

  - όπου **θ** το σύνολο των αντικαταστάσεων οι οποίες κάνουν τα $\mathbf{p'_i}$ και $\mathbf{p_i}$ συντακτικά όμοια.
- Ηεξαγωγή του συμπεράσματος γίνεται σε ένα βήμα:

$$\frac{\begin{array}{l}(\forall X)\ (\text{άνθρωπος}(X) \rightarrow \text{θνητός}(X))\\ \text{άνθρωπος}(\text{νίκος})\end{array}}{\text{θνητός}(\text{νίκος})\quad (\text{με}\ \theta=\{X/\text{νίκος}\})}$$

- Μια αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιεί ως μοναδικό κανόνα συμπερασμού τον ΓΤΘ είναι *ορθή* αλλά στην γενική περίπτωση *δεν είναι πλήρης*.
  - Μια τέτοια διαδικασία είναι πλήρης μόνο αν η βάση γνώσης αποτελείται από προτάσεις Horn.

Η Αρχή της Ανάλυσης στη Κατηγορηματική Λογική

Η *αρχή της ανάλυσης* (*resolution*) είναι ο μοναδικός κανόνας που απαιτείται για την εξαγωγή όλων των σωστών συμπερασμάτων σε μια αποδεικτική διαδικασία που χρησιμοποιεί τη μέθοδο της "*εις άτοπο απαγωγής*" (*refutation*).

- Η διαδικασία απόδειξης είναι ορθή και πλήρης.

- Στην απλή περίπτωση περιλαμβάνει προτάσεις οι οποίες περιέχουν το πολύ δύο λεκτικά στοιχεία (literals):

$$\frac{p \vee \neg q,\ z \vee q'}{\theta(p \vee z)}$$

  - Τα λεκτικά στοιχεία q' και $\neg q$ ονομάζονται συμπληρωματικά ζεύγη
  - Οι αντικαταστάσεις μεταβλητών που προκύπτουν εφαρμόζονται στο αναλυθέν (resolvent) $p \vee z$.

Διαδικασία Απόδειξης

- Η διαδικασία απόδειξης περιλαμβάνει την
  - εισαγωγή της άρνησης της προς απόδειξης πρότασης στο αρχικό σύνολο προτάσεων
  - εφαρμογή του κανόνα της ανάλυσης μέχρι το σύστημα να εξαγάγει την κενή πρόταση (άτοπο).
- Π.χ. έστω ότι θέλουμε να διερευνήσουμε αν το έμβολο μιας μηχανής χρειάζεται αντικατάσταση:

βλάβη(μηχανή)

σύμπτωμα(έμβολο, θόρυβος)

μέρος(έμβολο, μηχανή)

εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)

¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) ∨ αντικατάσταση(Z)

¬βλάβη(X)∨¬σύμπτωμα(R, θόρυβος)∨¬μέρος(R,X)∨ αντικατάσταση(R)

  - Εισάγεται η άρνηση της πρότασης **αντικατάσταση(έμβολο)** και εφαρμόζεται διαδοχικά ο κανόνας της ανάλυσης.
- Οι προτάσεις πρέπει να είναι σε μορφή διαζεύξεων (προτασιακή μορφή της κατηγορηματικής λογικής).

Απόδειξη βασισμένη στην αρχή της ανάλυσης στην Κατηγορηματική Λογική

¬ αντικατάσταση(έμβολο)

¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) ∨ αντικατάσταση(Z)

θ={Z/έμβολο}

¬βλάβη(W)∨¬εξάρτημα(έμβολο,W,δεν_λειτουργεί)

εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)

θ'={W/μηχανή}

βλάβη(μηχανή)

¬βλάβη(μηχανή)

□ (κενή πρόταση)

Μορφή Kowalski

❖ Μια εναλλακτική διατύπωση του κανόνα της ανάλυσης αφορά την μορφή Kowalski

$$\frac{\begin{array}{c} p_1, p_2, \ldots, p_m \rightarrow q \\ z_1, z_2, \ldots, z_n, q' \rightarrow s \end{array}}{\theta(p_1, p_2, \ldots, p_m, z_1, z_2, \ldots, z_n \rightarrow s)}$$

❖ Η διαδικασία είναι περισσότερο κατανοητή.

❖ Έτσι το προηγούμενο παράδειγμα σε μορφή Kowalski γράφεται:

```
→βλάβη(μηχανή)
→εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)
→σύμπτωμα(έμβολο, θόρυβος)
→μέρος(έμβολο, μηχανή)
βλάβη(W),εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) → αντικατάσταση(Z)
βλάβη(X),σύμπτωμα(R, θόρυβος),μέρος(R,X) → αντικατάσταση(R)
```

❖ Η άρνησης της προς απόδειξη πρότασης αναπαριστάται στην μορφή Kowalski ως

```
αντικατάσταση(έμβολο)→
```

Απόδειξη με προτάσεις στην μορφή Kowalski

βλάβη(W),εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) → αντικατάσταση(Z)

αντικατάσταση(έμβολο)→

θ={Z/έμβολο}

βλάβη(W),εξάρτημα(έμβολο,W,δεν_λειτουργεί)→

→εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)

θ'={W/μηχανή}

→βλάβη(μηχανή)

βλάβη(μηχανή)→

□ **(κενή πρόταση)**

Παρατηρήσεις στην Διαδικασία Απόδειξης

- Αποδείξεις δεν είναι μοναδικές.

βλάβη(W),εξάρτημα(Z,W,δεν_λειτουργεί) → αντικατάσταση(Z)

→βλάβη(μηχανή)

θ={ W/μηχανή }

εξάρτημα(Z,μηχανή,δεν_λειτουργεί)→ αντικατάσταση(Z)

→εξάρτημα(έμβολο, μηχανή, δεν_λειτουργεί)

θ'={ Z/έμβολο }

αντικατάσταση(έμβολο)→

→ αντικατάσταση(έμβολο)

□ (κενή πρόταση)

Απόδειξη και Αναζήτηση

- Η εύρεση απόδειξης αποτελεί ουσιαστικά ένα πρόβλημα αναζήτησης
  - Ο μοναδικός τελεστής μετάβασης είναι ο κανόνας της ανάλυσης
- Αναζήτηση κατά πλάτος (breadth-first),
  - Παράγει τις συντομότερες αποδείξεις.
  - Δραματική αύξηση αριθμού των κόμβων.
- Εμφανίζεται πρόβλημα της συνδυαστικής έκρηξης.
- Γραμμική ανάλυση (*linear resolution*),
  - Τουλάχιστον μία από τις προτάσεις σε κάθε απόπειρα ανάλυσης πρέπει να είναι είτε
    - πρόταση εισόδου ή
    - προηγούμενο αναλυθέν στο συγκεκριμένο κλαδί του δένδρου αναζήτησης.

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της "αρχής της Ανάλυσης"

- Βάση για την δημιουργία του λογικού προγραμματισμού.
  - Γλώσσα Prolog
  - Χρησιμοποιεί προτάσεις Horn και SLD - ανάλυση.

Πλεονεκτήματα και Μειονεκτήματα της Κατηγορηματικής Λογικής

- Πλεονεκτήματα της κατηγορηματικής λογικής:
  - Αντιστοιχία με τη φυσική γλώσσα, ικανοποιητική έκφραση ποσοτικοποίησης των εννοιών με τους κατάλληλους ποσοδείκτες, ικανότητα να συλλάβει τη γενικότητα.
- Μειονεκτήματα
  - *Αδυναμία έκφρασης ασάφειας*: Κάθε πρόταση μπορεί να είναι μόνο αληθής ή ψευδής.
  - *Αθροιστικότητα των αποτελεσμάτων*: Ένα συμπέρασμα προστίθεται στη γνώση χωρίς να δίνεται η δυνατότητα αναθεώρησής του αν αργότερα κριθεί ότι είναι εσφαλμένο.
- Λογικός Προγραμματισμός
- Η κλασική λογική επεκτείνεται με διάφορες εντολές ελέγχου και λειτουργικές δομές,
- Ευελιξία και ευκολία στην ανάπτυξη εφαρμογών.
- Χαρακτηριστικό παράδειγμα τέτοιου συστήματος είναι η γλώσσα Prolog.

Μη-μονότονη λογική (1/2)

- Σε μια *μονότονη* λογική, υπάρχει ένα σύστημα αξιωμάτων *S* (η αρχική βάση γνώσης) και ένα σύνολο τύπων *F* που αποδεικνύονται (συνάγονται) από το *S*.
- Η προσθήκη ενός ή περισσοτέρων αξιωμάτων στο *S* (απόκτηση νέας γνώσης), το σύνολο *F* αυξάνει *μονότονα.*
- Πλεονεκτήματα:
  - Κάθε φορά που προστίθεται ένα νέο γεγονός στο *S*, δε χρειάζονται νέοι έλεγχοι.
  - Για κάθε νέο γεγονός που αποδεικνύεται δεν είναι απαραίτητη η καταγραφή των γεγονότων πάνω στα οποία βασίζεται η αλήθεια του.
- Μειονεκτήματα:
  - η προσθήκη νέων αξιωμάτων μπορεί να μειώσει το σύνολο των δυνατών συμπερασμάτων, αφαιρώντας κάποια που αποδεικνύονται εσφαλμένα μετά την προσθήκη
- Οι μη-μονότονες συλλογιστικές είναι κατάλληλες για την αντιμετώπιση κάποιων καταστάσεων που εμφανίζονται συχνά στον πραγματικό κόσμο:
  - Καταστάσεις για τις οποίες δεν έχουμε πλήρη γνώση
  - Καταστάσεις στις οποίες, η γνώση δημιουργείται κατά τη διάρκεια της εκτέλεσης ενεργειών, για τις οποίες δεν είμαστε βέβαιοι για την αναγκαιότητα ή ορθότητά τους.
  - Καταστάσεις στις οποίες η γνώση μεταβάλλεται.
  - Καταστάσεις στις οποίες το σύστημα χρησιμοποιεί υποθέσεις (assumptions).

Μη-μονότονη λογική (2/2)

- *Στη μη-μονότονη τροπική λογική* (*non-monotonic modal logic*) εισάγεται ένας νέος *τροπικός τελεστής* ο οποίος δηλώνει ότι ένα γεγονός "είναι συνεπές με τις τρέχουσες πεποιθήσεις".
- Η συλλογιστική εύλογων υποθέσεων *(*default reasoning*)* χρησιμοποιείται σε περιπτώσεις κατά τις οποίες ένα γεγονός συνάγεται από ένα δοσμένο γεγονός, γιατί έτσι συμβαίνει συνήθως και γιατί δεν υπάρχει ένδειξη για το αντίθετο.
- Το πρόβλημα της μονοτονίας αντιμετωπίζεται με την εισαγωγή κατάλληλων μηχανισμών εξαγωγής συμπερασμάτων οι οποίοι καταγράφουν ποια γεγονότα χρησιμοποιήθηκαν για την εξαγωγή ενός νέου συμπεράσματος.
- Τα συστήματα που χρησιμοποιούν αυτούς τους μηχανισμούς ονομάζονται *συστήματα συντήρησης αλήθειας* (*truth maintenance systems*).
- TMS (McAllester 1980): Διατηρεί συνεχώς τη συνέπεια ενός συνόλου λογικών ισχυρισμών, ώστε να βρεθεί κάποια λύση σε ένα πρόβλημα ικανοποίησης περιορισμών.
- ATMS (De Kleer 1986): Δίνει τη δυνατότητα εύρεσης περισσότερων εναλλακτικών λύσεων μέσω της συλλογιστικής σε παράλληλους κόσμους
  - Οι κόσμοι είναι εσωτερικά συνεπείς, αλλά μεταξύ τους μπορεί να είναι ασυνεπείς.

Αναιρέσιμη Λογική

- Η *αναιρέσιμη λογική* (*defeasible logic*) είναι απλή αλλά αποδοτική προσέγγιση στη μη-μονότονη λογική
  - Έχει πολλές εφαρμογές στο σημασιολογικό διαδίκτυο και ηλεκτρονικό εμπόριο
  - Π.χ. μοντελοποίηση *εμπορικών κανόνων* (*business rules*) και *κανονισμών* (*regulations*), μοντελοποίηση *συμβολαίων* (*contracts*), συλλογιστική σε *νομικά* θέματα (*legal reasoning*), στρατηγικές *διαπραγμάτευσης πρακτόρων* (*agent negotiation*), *ενοποίηση* ετερογενών πηγών γνώσης και οντολογιών (*ontology integration*).
- Η αναιρέσιμη λογική αναπαριστά και διαχειρίζεται *αντιφάσεις* (*conflicts*) μεταξύ των κανόνων ενός προγράμματος.
  - Οι αντιφάσεις εκφράζονται ως αντικρουόμενα συμπεράσματα.
  - Η απλούστερη μορφή μιας αντίφασης είναι όταν το συμπέρασμα ενός κανόνα αποτελεί την άρνηση του συμπεράσματος του άλλου κανόνα.
- Παράδειγμα:

r_1: *πιγκουΐνος*(X) $\rightarrow$ *πουλί*(X)	Ισχυρός κανόνας
r_2: *πουλί*(X) $\Rightarrow$ *πετάει*(X)	Αναιρέσιμος κανόνας
r_3: *πιγκουΐνος*(X) $\Rightarrow$ $\neg$*πετάει*(X)	Αναιρέσιμος κανόνας
$r_3 > r_4$	Σχέση Υπεροχής
r_4: *βαρύ*(X) ~> $\neg$*πετάει*(X)	Αναιρετής